Zadania z Algebry II. 22.03.19

1. Niech $V := \mathbb{R}^3$. Sprawdzić, że formy liniowe $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in V^*$, dane wzorami: $\phi_k(\vec{x}) := x_1 + x_2 + x_3 - 2kx_k, \quad k = 1, 2, 3$ tworzą bazę V^*

2. Niech $V := \mathbb{R}_3[\cdot]$. Określmy formy liniowe $\phi_0, \dots, \phi_3 \in V^*$ wzorami:
   $< \phi_k, v >:= v^{(k)}(-4), \quad k = 0, \dots, 3.$
   Znaleźć bazę w V, do której baza $\phi_0, \dots, \phi_3 \in V^*$ jest sprzężona.

3. Znaleźć rząd, sygnaturę oraz bazę diagonalizującą formę kwadratową, jeśli $Q : V \to \mathbb{R}$ ma następującą postać:
   (a) $V := \mathbb{R}_2[\cdot]$, $Q(v) := v(-1) \cdot v'(1)$.
   (b) $V := \mathbb{R}^2_2$, $Q(\mathbf{x}) := \operatorname{tr}\left(\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\right)$.

4. Znaleźć sygnaturę oraz bazę diagonalizującą formy kwadratowej Q, określonej na przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wzorem $Q(\mathbf{x}) := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

5. Dane są dwie formy kwadratowe: $Q : V \to \mathbb{R}$ oraz $Q_0 : V_0 \to \mathbb{R}$. Znaleźć, lub (też wykazać, że nie istnieje) operator liniowy $F : V \to V_0$, taki że $\forall v \in V : Q(v) = Q_0(Fv)$ gdy:
   (a) $V := \mathbb{R}^2_2,\ Q(\mathbf{x}) := \det \mathbf{x}, \quad V_0 := \mathbb{R}_3[\cdot],\ Q_0(v) := \int_0^1 [v(t)]^2 dt,$
   (b) $V := \mathbb{R}^2_2,\ Q(\mathbf{x}) := \det \mathbf{x}, \quad V_0 := \mathbb{R}^2_2,\ Q(\mathbf{x}) := \operatorname{tr}(\mathbf{x}^2),$
   (c) $V = V_0 = \mathbb{R}^2,\ Q(\mathbf{x}) := 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2,\ Q_0(\mathbf{x}) := 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$