

Algebra z geometrią 2 - zadania domowe 2

1. Znajdź wartości własne, przestrzenie własne i przestrzenie pierwiastkowe następujących macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -103 & 100 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 9 & -10 & 1 \\ 12 & -18 & 4 \end{bmatrix},$$

Jeśli $A \in L(V)$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną A krotności n_i , to przestrzeń pierwiastkową definiujemy $V_\lambda = \ker(A - \lambda 1)^{n_i}$.

2. Znajdź

(a) \mathbf{A}^{77} , (b) \mathbf{Q}^{2015} , (c) $e^{\mathbf{B}}$, (d) $e^{\mathbf{R}}$.

3. Rozwiąż równanie różnicowe $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{R}\mathbf{X}_n$.

4. Rozwiąż równanie różniczkowe $\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{X}(t)$. Rozwiązania szukać w postaci $\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha^i(t) \mathbf{v}_i$, gdzie $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jest bazą wektorów własnych \mathbf{B} .