Zadania do wykładu algebra z geometrią

seria 9

Zad.1 Skonstruować bazę ortogonalną podprzestrzeni przesterzeni $\mathbb{R}^4$ rozpinanych przez
a) $(1,2,2,-1)^T, (1,1,-5,3)^T, (3,2,8,-7)^T$, b) $(1,1,-1,-2)^T, (5,8,-2,-3)^T, (3,9,3,8)^T$,
c) $(2,1,3,-1)^T, (7,4,3,-3)^T, (1,1,-6,0)^T, (5,7,7,8)^T$. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określony jest euklidesowy iloczyn skalarny.

Zad.2 Wyznaczyć bazę dopełnienia ortogonalnego podprzestrzeni rozpinanych przez wektory a) $(1,0,2,1)^T, (2,1,2,3)^T, (0,1,-2,1)^T$, b) $(1,1,1,1)^T, (-1,1,-1,1)^T, (2,0,2,0)^T$. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określony jest euklidesowy iloczyn skalarny.

Zad.3 W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym euklidesowym iloczynem skalarnym znaleźć rzut prostopadły wektora $v = (4,2,3,1)^T$ na przestrzeń $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$.

Zad.4 Niech $(\ ,\ )$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni $V = \mathbb{R}^4$. Niech $V \supset W = Span((0,1,2,1)^T, (1,3,2,2)^T, (2,1,-6,-1)^T)$. Znajdź bazę przestrzeni $W^\perp$

- jeśli $(\ ,\ )$ jest standardowym iloczynem skalarnym,
- jeśli $((x_1,x_2,x_3,x_4)^T, (y_1,y_2,y_3,y_4)^T) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_3y_4 - x_4y_3 + 2x_4y_4$.

Zad.5 W przestrzeni $\mathbb{C}(2)$ zespolonych, kwadratowych macierzy stopnia 2 określamy iloczyn skalarny

$$g(X,Y) = \mathrm{tr}(X^*Y).$$

Znaleźć dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni a) V_1 - macierzy o śladzie 0, b) macierzy X spełniających $X = (X^*)^T$, c) macierzy Y spełniających $Y = -(Y^*)^T$, d) macierzy górnotrójkątnych, e) macierzy symetrycznych, f) macierzy antysymetrycznych.

Zad.6 Niech V oznacza rzeczywistą przestrzeń wektorową macierzy X stopnia 2 spełniających $X = (X^*)^T$ i niech $g(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$, $X, Y \in V$, będzie iloczynem skalarnym. Pokazać, że wektory

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tworzą bazę ortonormalną w V.

Zad.7 W przestrzeni $\mathbb{R}_2[t] = \langle 1, t, t^2 \rangle$ z iloczynem skalarnym $(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt$ skonstruować bazę ortonormalną.

Zad.8 Zadania 349, 351, 352, 353 ze zbioru zadań "Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami", J. Jezierski et al.