3. seria zadań do wykładu "Algebra z geometrią II"

12. maja 2014 r.

Zadanie 1. Wyznacz postać Jordana macierzy endomorfizmu pewnej przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej V, który w bazie $\mathscr{B} := (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ tej przestrzeni jest reprezentowany przez macierz $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$. Rozłóż wektory odnośnej bazy jordanowskiej w bazie $\mathscr{B}$.

$$\text{(i)}\quad A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iii)}\quad A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iv)}\quad A := \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{(v)}\quad A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{(vi)}\quad A := \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & n & n-1 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. Wyznacz postać Jordana macierzy (i) A^2 oraz (ii) A^{-1} na podstawie zadanej (dowolnej) postaci Jordana J_A macierzy A.

Zadanie 3. Wyznacz postać Jordana macierzy A spełniającej równość

$$\text{(i)}\quad A^2 = \mathbf{1}_{n\times n}\,, \qquad \text{(ii)}\quad A^2 = A\,.$$

Zadanie 4. Znajdź *wszystkie* rozwiązania równania macierzowego $X^2 = A$ (o niewiadomej X) dla

$$\text{(i)}\quad A := \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Które z tych rozwiązań zależą wielomianowo od A?

Zadanie 5. Korzystając z postaci Jordana macierzy, oblicz

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}, \qquad \text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}, \qquad \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{7}.$$

Zadanie 6. Na podstawie twierdzenia o rozkładzie macierzy $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ na część diagonalną i nilpotentną udowodnij tożsamość

$$\det_{(n)} \mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}_{(n)} A}.$$

Zadanie 7. Wyznacz macierze $\exp(t\,A^k)$ (określoną dla dowolnych $(k,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$) oraz $\sum_{k=1}^{n} A^k$ (określoną dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$) dla

$$\text{(i)} \quad A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 8. Oblicz

$$\text{(i)} \quad \mathrm{th}(1 + tA^2) \quad \text{dla} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{i dowolnego} \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{(ii)} \quad \log A \quad \text{dla} \quad A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{przy czym} \quad \begin{cases} \log(z) := \log|z| + \mathsf{i}\,\arg(z)\,, \\ -\pi < \arg(z) \leq \pi \end{cases} \quad \text{dla} \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\text{(iii)} \quad \int_{\mathbf{0}_{3\times 3}}^{A} \mathsf{d}t\, \frac{1}{t^3 - 4t^2 + 9t - 36} \quad \text{dla} \quad A := \begin{pmatrix} -17 & 7 & 0 \\ -16 & -25 & 48 \\ -4 & -28 & 45 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iv)} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n A^{2n} \quad \text{dla} \quad A := \begin{pmatrix} 1 + 15\sqrt{2} & 25\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 1 - 15\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9. Rozważmy operator

$$p \;:\; \mathbb{C}_2[t] \to \mathbb{C}_2[t] \;:\; w \mapsto \frac{1}{\mathsf{i}}\, w'\,, \qquad \text{gdzie} \quad (a.t^0 + b.t^1 + c.t^2)' := b.t^0 + 2c.t^1 \quad \text{dla} \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Znajdź macierz operatora $T_x := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,p}$ w bazie jednomianowej $\mathscr{J} := (t^0, t^1, t^2)$ przestrzeni $\mathbb{C}_2[t]$, a następnie wykaż, że T_x jest operatorem przesunięcia działającym według wzoru

$$T_x(a.t^0 + b.t^1 + c.t^2) = a.t^0 + b.(t + x.t^0)^1 + c.(t + x.t^0)^2 \,.$$

Zadanie 10. Oznaczmy przez $\mathrm{SO}(n)$ dla $n \in \mathbb{N}_{>0}$ grupę

$$\mathrm{SO}(n) := \{ \, O \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \quad | \quad O \cdot O^T = \mathbf{1}_{n\times n} = O^T \cdot O \quad \wedge \quad \det_{(n)} O = 1 \, \}$$

(z iloczynem macierzy jako działaniem grupowym), zwaną **grupą ortogonalną specjalną** – jest to grupa obrotów w przestrzeni (euklidesowej) $\mathbb{R}^n$ zachowujących orientację tej przestrzeni. Dowolną macierz $O \in \mathrm{SO}(n)$ można zapisać w postaci $O = \mathrm{e}^A$, gdzie $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ jest pewną macierzą skośnie symetryczną, tj. $A^T = -A$. Udowodnij, że ilekroć n jest liczbą nieparzystą z każdą macierzą $O \in \mathrm{SO}(n)$ jest stowarzyszony wektor $v \in \mathbb{R}^n$ niezmienniczy względem działania O, czyli taki, który spełnia równość

$$O \cdot v = v$$

i tym samym wyznacza oś obrotu reprezentowanego przez macierz O.

Zadanie 11. Rozwiąż następujące rekurencje:

(i) $x_n = \alpha\, x_{n-1} - \frac{\alpha^2}{4}\, x_{n-2}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ przy warunku początkowym $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,\alpha^{-1} \end{pmatrix}$ – dla jakich wartości parametru α ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny?

(ii) $x_{n+3} + 4x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = 0$ przy warunku początkowym $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{4x_n + 5}$ przy warunku początkowym $x_0 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 12.* TBA

Powodzenia!