PROGRAM

1. GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA.
2. ANALIZA ZESPOLONA
3. TEORIA DYSTRYBUCJI, TRANFORMATA FOURIERA

WSTĘP

W geometrii różniczkowej zajmujemy obiektami (funkcje, pole wektorowe, formy różniczkowe, tensory {metryczny}) które są "funkcjami" na danej powierzchni M.

Obiekty te opisujemy we współrzędnych. Na przykład:

$S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$ - sfera n-wymiarowa.

$O_{i,\varepsilon} \subset S^n \qquad i = 1, \dots, n+1 \qquad \varepsilon \in \{+,-\}$.

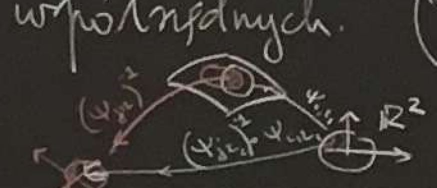
gdzie $O_{i,\pm} = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x_i \gtrless 0\}$

$B^n = \{(t^1, \dots, t^n) : (t^1)^2 + \dots + (t^n)^2 < 1\}$

Definiujemy współrzędne $\Psi_{i,\varepsilon} : B^n \to O_{i,\varepsilon} \subset S^n$ w następujący sposób: $\Psi_{i,\varepsilon}(t^1, \dots, t^n) = (t^1, \dots, t^{i-1}, \varepsilon\sqrt{1-\sum (t^i)^2}, t^i, \dots, t^n)$

Odwzorowania odwrotne $(\Psi_{i,\varepsilon})^{-1} : O_{i,\varepsilon} \to B^n$ jest dane wzorem $(\Psi_{i,\varepsilon})^{-1}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$ i nazywane jest mapą.

Ponadto zdefiniowane są odwzorowania przejścia między układami współrzędnych. $(\Psi_{j,\varepsilon_2})^{-1} \circ \Psi_{i,\varepsilon_1}$



Niech V będzie przestrzenią wektorową rzeczywistą, $\dim V = n$

Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą V.

Przestrzeń sprzężona $V^* = L(V, \mathbb{R})$ ← formy liniowe, $\dim V^* = n$

Baza dualna $\mathcal{E}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$: $e^i(e_j) = \delta^i_j$

Współrzędne wektorów $v = \sum_{i=1}^n e^i(v) e_i$

Układ współrzędnych na V.

$\mathbb{R}^n \ni (t^1, \dots, t^n) \xmapsto{\Psi_\varepsilon} v = \sum_{i=1}^n t^i e_i \in V$ Mapa $\Psi_\varepsilon^{-1}(v) = (e^1(v), \dots, e^n(v))$

$V \overset{i}{\simeq} V^{**}$ gdzie $i(v) \in (V^*)^*$ jest zdefiniowany następująco: $\forall \theta \in V^* \quad i(v)(\theta) := \theta(v) \in \mathbb{R}$.

Uwaga: $i(v) \in L(V^*; \mathbb{R}) = V^{**}$.

Jeśli V, W - p-nie wektorowe to $L(V, W; \mathbb{R})$ - formy 2-liniowe na $V \times W$. $Q \in L(V, W; \mathbb{R})$ oznacza, że $Q : V \times W \to \mathbb{R}$ jest 2-liniowe

Współrzędne (macierz) Q w bazach: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ (p-ni W): $[Q]^{\mathcal{E},\mathcal{F}}_{i,j} = (q_{ij})$ gdzie $q_{ij} = Q(e_i, f_j)$

Definicja

Niech $\theta \in V^*$ oraz $\varrho \in W^*$. Forma 2-liniowa dana wzorem $V \times W \ni (v, w) \mapsto \theta(v)\varrho(w) \in \mathbb{R}$ nazywamy iloczynem tensorowym θ i ϱ oraz oznaczamy symbolem $\theta \otimes \varrho$. Odwzorowanie $V^* \times W^* \ni (\theta, \varrho) \mapsto \theta \otimes \varrho \in L(V, W; \mathbb{R})$ oznaczamy symbolem $\otimes$

Uwaga: $\otimes$ jest odwzorowaniem 2-liniowym

$\theta \otimes (t_1 \varrho^1 + t_2 \varrho^2) = t_1 \theta \otimes \varrho^1 + t_2 \theta \otimes \varrho^2$ itd.

Od tej pory $L(V, W, \mathbb{R})$ oznaczamy $V^* \otimes W^*$

$V^*\otimes W^* \stackrel{def}{=} L(V, W; \mathbb{R})$

$V\otimes W \stackrel{def}{=} L(V^*, W^*; \mathbb{R})$

Od tej pory napisy $v\otimes w$ mają sens gdy $v\in V$, $w\in W$.

Baza p-ni $V^*\otimes W^*$ jest układ tensorów $(e^i\otimes f^j)_{\substack{i=1,\dots,\dim V\\ j=1,\dots,\dim W}}$. Jeśli $[Q]^{\mathcal{E},\mathcal{F}}_{\substack{i=1,\dots,\dim V\\ j=1,\dots,\dim W}} = (q_{ij})$ to $Q=\sum_{i,j} q_{ij}\, e^i\otimes f^j$ - czyli układ ten rozpina $V^*\otimes W^*$. Liniowa niezależność: $\sum q_{ij}\, e^i\otimes f^j = 0 \Rightarrow$

$q_{kl} = \left(\sum q_{ij}\, e^i\otimes f^j\right)(e_k, f_l) = 0$

Definicje

Jeśli $V_1,\dots,V_k$ są p-niami wektorowymi to

$V_1\otimes V_2\otimes\dots\otimes V_k \stackrel{def}{=} L(V_1^*,\dots,V_k^*; \mathbb{R})$.

Jeśli $(v_1,\dots,v_k)\in V_1\times\dots\times V_k$ to

$v_1\otimes\dots\otimes v_k \in V_1\otimes\dots\otimes V_k$.

Definicja: P-ń wektorową $\underbrace{V^*\otimes\dots\otimes V^*}_{k\text{-elem}}\otimes\underbrace{V\otimes\dots\otimes V}_{l\text{-elem}}$ nazywamy p-nią (k,l)-tensorów i oznaczamy $T^{(k,l)}V$ a jej elementy (k,l)-tensorami.

Rozważmy (k,l)-tensory $e^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} := e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_k}\otimes e_{j_1}\otimes\dots\otimes e_{j_l}$.

Układ $(e^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l})$ jest bazą p-ni $T^{(k,l)}V$.

Współrzędne tensora $Q\in T^{(k,l)}V$ to

$Q=\sum Q^{j_1\dots j_l}_{i_1\dots i_k}\, e^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$

$(Q^{j_1\dots j_l}_{i_1\dots i_k}) = [Q]^{\mathcal{E}\, j_1\dots j_l}_{i_1\dots i_k} \leftarrow$ współrzędne.

Jeśli $e_i=\sum_j a^j_i \tilde{e}_j$ gdzie $\tilde{\mathcal{E}}=(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ to

$e^j=\sum_i a^j_i \tilde{e}^i$ i $[Q]^{\mathcal{E}}$