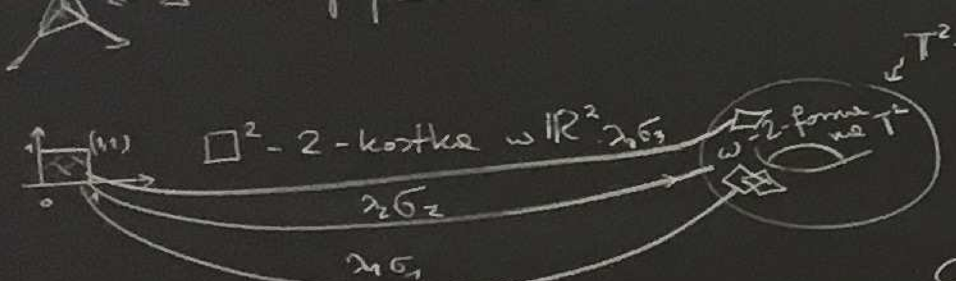
Δ^3 - 3-sympleks w $\mathbb{R}^3$



T^2 - torus 2-wymiarowy

$\square^2$ - 2-kostka w $\mathbb{R}^2$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$c = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3$ - przykład singularnego gładkiego 2-łańcucha w T^2

$f(x,y)\,dx \wedge dy = \sigma^*\omega$ - 2-forma na $\square^2$.

Definiujemy $\int_\sigma \omega := \int_{\square^2} f(x,y)\,dx\,dy$.

$$\int_c \omega := \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \int_{\sigma_i} \omega$$

Definicja (zastępujemy sympleksy przez kostki singularne).

M - rozmaitość, $I^k \subset \mathbb{R}^k$ gdzie $I^k = \{(x_1, \dots, x_k) : 0 \le x_i \le 1\} = [0,1]^k$.

$\sigma : I^k \to M$ - gładkie

σ nazywamy singularną gładką k-kostką w M.

σ_i - s.g.k.-kostki w M & $\lambda_i \in \mathbb{R}$

to $c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma_i$ - singularny gładki k-łańcuch w M.

$\omega \in \Omega^k(M)$ to $\int_c \omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{I^k} \sigma_i^* \omega$.

Definicja (brzeg łańcucha).

σ - s.g. k-kostka $\sigma : I^k \to M$. Dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ oraz $\alpha \in \{0,1\}$ rozważmy s.g. $(k-1)$ kostkę $\sigma_{i,\alpha}$

daną wzorem $\sigma_{i,\alpha}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sigma(x_1, \dots, \overset{i}{\alpha}, x_i, \dots, x_{k-1})$.

$k-1$ łańcuch postaci $\sum_{\substack{i \in \{1,\dots,k\} \\ \alpha \in \{0,1\}}} (-1)^{i+\alpha} \sigma_{i,\alpha}$ nazywamy brzegiem σ i oznaczamy $\partial\sigma$.

Ogólnie jeśli $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i$ to $\partial c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial\sigma_i$.

<u>Stwierdzenie</u> $\partial\partial c = 0$

<u>Dowód</u>. Wystarczy sprawdzić dla $c = \sigma$.

Niech $i \le j$. Wówczas $(\sigma_{i,\alpha})_{(j,\beta)}(x_1, \dots, x_{k-2}) = \sigma(x_1, \dots, \overset{}{\underset{i}{\alpha}}, \dots, \underset{j}{\beta}, \dots, x_{k-2})$

oraz $(\sigma_{j+1,\beta})_{i,\alpha}(x_1, \dots, x_{k-2}) = \sigma(x_1, \dots, \overset{i}{\alpha}, \dots, \overset{j}{\beta}, \dots, x_{k-2})$.

Zatem $\partial\partial\sigma = \partial \sum_{\substack{i=1,\dots,k \\ \alpha=0,1}} (-1)^{i+\alpha} \sigma_{i,\alpha} = \sum_{\substack{i,j \\ \alpha,\beta}} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (\sigma_{i,\alpha})_{j,\beta} = 0$. ∎

Przykład.

$\mathrm{id} : I^2 \ni (x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$\partial\, \mathrm{id} = -I^2_{1,0} + I^2_{1,1} + I^2_{2,0} - I^2_{2,1}$

Twierdzenie Stokesa dla k łańcuchów.

Niech c będzie singularnym gł. k-łańcuchem w M oraz $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$

Wówczas $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.

<u>Dowód</u> Wystarczy dla $c = \sigma : I^k \to M$

$$\int_\sigma d\omega = \int_{I^k} \sigma^* d\omega = \int_{I^k} d\underline{\sigma^*\omega} \overset{?}{=} \int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\partial I^k} \sigma^*\omega \qquad \sigma^*\omega \in \Omega^{k-1}(I^k)$$

Dalej wystarczy udowodnić tw. dla $\sigma^*\omega = f\,dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k$

$$\int_{I^k} df\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k = (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i+1} \int_{I^k} \left(f(x^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x^k) - f(x^1, \dots, \underset{i}{0}, \dots, x^k) \right) dx^1 \dots dx^k = P$$

$$\int_{\partial I^k} f\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k = \sum_{j,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^{k-1}} (I_{j,\alpha})^* \left(f\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k \right) =$$

$$= (-1)^{i+1} \left(\int_{I^{k-1}} \left(f(x^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x^k) - f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k) \right) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k \right) =$$

$$= (-1)^{i+1} \left(\int_{I^k} \left(f(x^1, \dots, 1, \dots, x^k) - f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k) \right) dx^1 \dots dx^i \dots dx^k \right) = L$$

$P = L$ ∎

<u>Przykład</u> $\omega \in \Omega^1(I^2)$ $\omega = f\,dx + g\,dy$. $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$

$$\int_{I^2} d\omega = \int_{\partial I^2} \omega$$

$$L = \int_{I^2} d\omega = \int_{I^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial I^2} f\,dx + g\,dy = \int_0^1 f(x,0)\,dx + \int_0^1 g(1,y)\,dy$$

$$+ \int_1^0 f(x,1)\,dx + \int_1^0 g(0,y)\,dy.$$ ∎

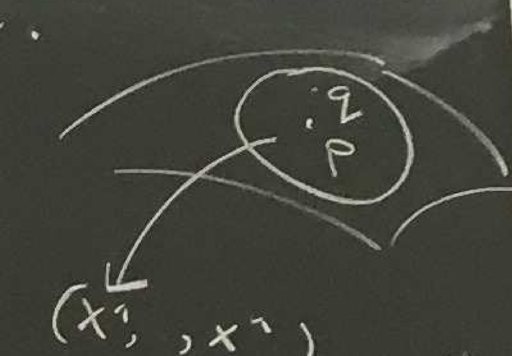
Niech V będzie przestrzenią wektorową $\mathbb{R}$, $\dim V < \infty$.

Niech $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ będą bazami przestrzeni V. Mówimy $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ zadają identyczną orientację V jeśli $\det\left([\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \right) > 0$

Wszystkie dzielą się na dwie klasy wzajemnie zgodnych baz.

Orientacja przestrzeni wektorowej to wskazanie jednej z tych klas, której elementy nazywamy dodatnio zorientowanymi.

Orientacja rozmaitości



Mówimy, że rozmaitość M jest zorientowana jeśli $\forall p \in M$ zadana jest orientacja T_pM, która zależy w sposób ciągły od p: tzn. $\forall p\ \exists$ ukł. wsp $(x^1, \dots, x^n)$ wokół p t.że $(\partial_{x^1}(q), \dots, \partial_{x^n}(q))$ jest baza T_qM dodatnio zorientowana.

Wstęgi Möbiusa nie można zorientować

Niech M będzie rozmaitością zorientowaną. $\dim M = k$

$\sigma : I^k \to M$ - sing. gł. k-kostka.

Dalej będziemy zakładać, że σ rozszerza się do $O \supset I^k$ i na tym O zadaje parametryzację "kawałka" M.

Innymi słowy $\underset{=(x^1, \dots, x^k)}{\sigma^{-1}}$ (po rozszerzeniu σ) jest układem wsp.

Ponadto będziemy zakładać, że $(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^k})$ jest zgodna z orientacją M.