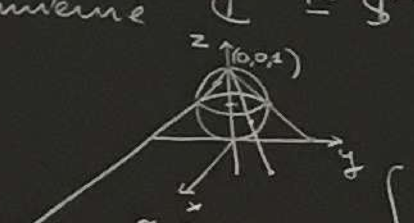
$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Otoczenia punktu w ∞: ustalamy $M>0$ $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \cup \{\infty\}$

Rzut stereograficzny = utożsamienie $\overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{S}^2$

$\mathbb{S}^2 = \{ x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \} \subset \mathbb{R}^3$



$\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$

$$\pi(x,y,z) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & z \neq 1 \\ \infty & z = 1 \end{cases}$$

$\tilde{x} = \frac{x}{1-z}$, $\tilde{y} = \frac{y}{1-z}$.

$$\Leftarrow \begin{cases} \sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1-z} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}} \end{cases}$$

Jeśli $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna to z definicji ∞ jest punktem osobliwym f.

Mówimy, że ∞ jest izolowanym punktem osobliwym f jeśli istnieje $M>0$ t. że $\{z : |z| > M\} \subset \mathcal{O}$.

Wówczas funkcja $g(z) = f(\frac{1}{z})$ jest dobrze zdefiniowana na zbiorze $\{z : |z| < \frac{1}{M}\}$. Zatem $0 \in \mathbb{C}$ jest izolowaną osobliwością funkcji g. Niech $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n$ będzie szeregiem Laurenta funkcji g. Wówczas $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{a_n}{z^n}$

Definicja Jeśli ∞ jest izolowaną osobliwością funkcji f to $\operatorname{Res}_\infty f := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi| = R > M} f(\xi)\, d\xi$

Zauważmy, że

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{\xi^n} d\xi = \left\{ \begin{array}{ll} \xi = Re^{-i\varphi} & \varphi \in [0, 2\pi] \\ d\xi = -iRe^{-i\varphi} d\varphi \end{array} \right\}$$

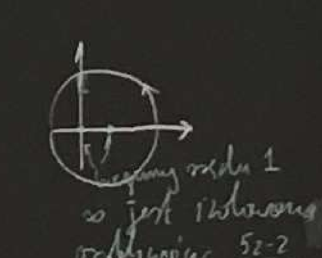
$$= \frac{1}{2\pi i} \sum a_n \int_0^{2\pi} \frac{-i\, Re^{-i\varphi}}{R^n e^{-in\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2\pi i} a_1 (-i) 2\pi = -a_1.$$

Ponadto $-a_1 = -\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Res}_\infty(f)$

Przykład: $\oint_{\{|z-1|=2\}} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = -2\pi i \operatorname{Res}_\infty \frac{5z-2}{z(z-1)} = 10\pi i.$

$\| $

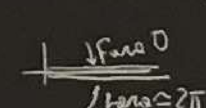
$2\pi i \operatorname{Res}_0(f) + 2\pi i \operatorname{Res}_1(f) = 2\pi i\, 2 + 2\pi i\, 3 = 10 i \pi.$



$$\operatorname{Res}_\infty \frac{5z-2}{z(z-1)} = -\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z^2} \frac{\frac{5}{z}-2}{\frac{1}{z}(\frac{1}{z}-1)} = -\operatorname{Res}_0 \frac{\frac{5}{z}-2}{1-z} = -\frac{5-2z}{1-z}\Big|_{z=0} = -5$$

Całka po kości:

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q\, Q(x)\, dx. \quad \begin{cases} Q \text{ - wymierna nie ma osobliwości na } [a,b] \\ p, q \in \mathbb{R} \quad p > -1, q > -1. \\ p+q \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



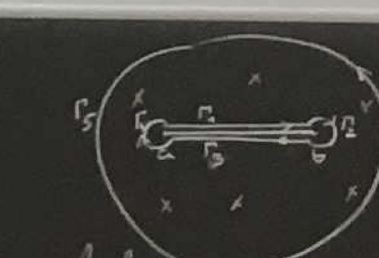
Rozważmy funkcję $z \longmapsto \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p (b-z)^{p+q} \cdot Q(z)$.

$\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p := e^{p \log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)}$ gdzie $\log : \mathbb{C} \setminus [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$.

czyli $\log z = \log|z| + i \arg z \in]0, 2\pi[$.

Zauważmy, że $\frac{z-a}{b-z}$ odwzorowuje odcinek $[a,b[$ na $[0,\infty[$.

Kontur wokół kości:



x - osobliwości Q

Funkcja $\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p$ jest dobrze zdefiniowana na $\mathbb{C} \setminus [a,b]$.

na Γ_1 $\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p \simeq \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^p$ natomiast na Γ_3 $\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p \simeq e^{2\pi i p} \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^p$.

$z = x + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$\frac{x+i\varepsilon-a}{(b-x-i\varepsilon)} = \frac{(x+i\varepsilon-a)(b-x+i\varepsilon)}{(b-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{(x-a)(b-x) + i\varepsilon(x-a+b-x) - \varepsilon^2}{(b-x)^2+\varepsilon} =$$

$= \ldots + i\varepsilon(b-a)$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_5$

$$\oint_\Gamma \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p (b-z)^{p+q} \cdot Q(z)\, dz = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q(x)\, dx - e^{2\pi i p} \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q(x)\, dx +$$

$$+ \text{całki po } \Gamma_2, \Gamma_4 \quad - 2\pi i \operatorname{Res}_\infty \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p (b-z)^{p+q} Q(z)$$

promienie „małych" okręgów $\longrightarrow 0$.

0

Ostatecznie $\left(1 - e^{2\pi i p}\right) \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q \cdot Q(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\xi \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [a,b]} \operatorname{Res}_\xi \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p (b-z)^{p+q} \cdot Q(z)$

Przykład.

$\int_0^\infty \log(x)\, Q(x)\,dx$ gdzie Q nie ma osobliwości na $[0,\infty[$ oraz $\lim_{z\to\infty} z\,Q(z) = 0$.

Funkcja $f(z) = (\log(z))^2 \cdot Q(z)$.

Kontur Γ:  "dziurka od klucza"

$$\oint_\Gamma (\log(z))^2 Q(z)\,dz = \int_\varepsilon^R (\log(x))^2 \cdot Q(x) + \oint_{|\xi|=\varepsilon} (\log(\xi))^2 Q(\xi)\,d\xi + \oint_{|\xi|=R} \log^2(\xi)\, Q(\xi)\,d\xi - \int_\varepsilon^R (\log(x)+2\pi i)^2 Q(x)$$

$$\oint_\Gamma (\log(z))^2 Q(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\xi\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty[} \operatorname{Res}_\xi Q(z)(\log(z))^2$$

$$\left|\oint_{|\xi|=\varepsilon} (\log(\xi))^2 Q(\xi)\,d\xi\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|(\log\varepsilon + i\varphi)^2 Q(\varepsilon e^{i\varphi})\right| \varepsilon\, d\varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

$\xi = \varepsilon e^{i\varphi}$

$\xi = R e^{i\varphi}$

$$\left|\int_{|\xi|=R} (\log(\xi))^2 Q(\xi)\,d\xi\right| \leq \int_0^{2\pi} \underbrace{\left|(\log R + i\varphi)^2 \underbrace{Q(Re^{i\varphi})}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0}\right| R}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0}\, d\varphi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Biorąc granicę $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$:

$$\int_0^\infty \left(\log(x)^2 - (\log(x)+2\pi i)^2\right) Q(x) = 2\pi i \sum_{\xi\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty[} \operatorname{Res}_\xi Q(z)(\log(z))^2$$

$$= -4\pi i \int_0^\infty \log(x)\, Q(x) + 4\pi^2 \int_0^\infty Q(x)\,dx$$

Funkcja Γ Eulera.

Niech $\operatorname{Re} z > 0$. Wówczas całka $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$ jest zbieżna? całką z parametrem z. Rzeczywiście, $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t} =$

$$= e^{(\operatorname{Re} z - 1)\log t + i\operatorname{Im} z \log t} = t^{\operatorname{Re} z - 1}\, e^{(i\operatorname{Im} z)\log t}.$$

Skoro $|e^{i\operatorname{Im} z \cdot \log t}| = 1$ to $\left|\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}\,dt$ a ta całka jest zbieżna. Definiujemy $\Gamma : \{z : \operatorname{Re} z > 0\} \ni z \mapsto \Gamma(z) \in \mathbb{C}$ gdzie $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$