Dowodziliśmy, że $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
$f(\zeta) = \zeta^{z-1}(\zeta-1)^{-2}$
$\zeta^{z-1} = e^{(z-1)\log \zeta}$
$(\zeta-1)^{-2} = e^{-2\log(\zeta-1)}$
$\arg \zeta \in]-\pi, \pi[$
$(z-1)\pi - 2\pi = -\pi$.
$-(z-1)\pi + 2\pi = \pi$
$f: \mathbb{C} \setminus [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
jest holomorficzna.
Kontur Γ zwany kości
Fane jest niejednoznacznie określona tylko dla $z \in [0,1]$
Dla $\mathrm{Re}\, z > 0$ udowodniliśmy, że $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt$.
Całkujemy f po Γ: $\oint_\Gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \,\mathrm{Res}_\infty f = -2\pi i\, \mathrm{Res}_0 \frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$
$\left\{ \frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{\zeta^{z-1}} \left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right)^{-2} = \frac{1}{\zeta}(1-\zeta)^{-2} \right\} = -2\pi i$ (1).
$-2\pi i = \oint_\Gamma f(\zeta)d\zeta = \int_{\Gamma_+} f(\zeta)d\zeta + \int_{\Gamma_-} f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-2}dt\,(e^{-i\pi z} - e^{+i\pi z})$
$(\zeta-1)^{-2} = (1-\zeta)^{-2} e^{+i\pi z}$.
$(\zeta-1)^{-2} = (1-\zeta)^{-2} e^{i\pi(-z)}$
Zatem $\underbrace{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}_{\text{Hol. na } \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}} = \underbrace{\frac{\pi}{\sin \pi z}}_{\text{Hol. na } \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}$ dla $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$.
a więc tożsamość zachodzi na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
Stwierdzenie Zachodzą wzory
1) $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2}$
2) $\frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-j^2} = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$
3) $\sin \pi z = \pi z \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$
Dowód (Ad 1) funkcja $g: z \mapsto \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-j)^2} - \frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2}$ jest holomorficzna
okresowa oraz znika gdy $|\mathrm{Im}\, z| \to \infty$. Ponadto
osobliwości tej funkcji w $z \in \mathbb{Z}$ są pozorne.
Np rozważmy $z = 0$. osobliwości biorą się z wyr. $\frac{1}{z^2}$ & $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$. Skoro $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \ldots} = \frac{\pi}{\pi z\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \ldots\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{(\pi z)^2}{3!} + \ldots\right)$
to $\frac{1}{z^2} - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 - 1 - \frac{2(\pi z)^2}{3!} + \ldots\right) \xrightarrow[z\to 0]{} -\frac{\pi^2}{3}$.
Wniosek funkcja g jest całkowita i ograniczona.
a więc jest stała. Skoro znika gdy $|\mathrm{Im}\, z| \to \infty$ to $g = 0$ ∎
(Ad 2) Z punktu (1) pochodna $h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-j^2} - \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$ jest
równa zero. Skoro $h(z) = h(-z)$ to $h \equiv 0$.
$\frac{1}{z+j} + \frac{1}{z-j}$
(Ad 3) Korzystając z (2) łatwo sprawdzić, że
$\frac{d}{dz} \log \frac{\sin(\pi z)}{\pi} = \frac{d}{dz} \log z \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$.
a zatem istnieje stała C t. że $\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = C z \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$.
Różniczkując obie strony i wstawiając $z = 0 \Rightarrow C = 1$.
Twierdzenie
Wzór Gaussa $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$
Wzór Weierstrassa $\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$.
Dowód
(G) $\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^n dt = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(n+1+z)} = \frac{n!\,\Gamma(z)}{z \ldots (z+n-1)(z+n)\Gamma(z)}$
$\left\{ \frac{s}{n} = t,\ s \in [0,n] \right\} = \int_0^n \frac{s^{z-1}}{n^{z-1}}\left(1 - \frac{s}{n}\right)^n \frac{ds}{n} = \frac{1}{n^z} \int_0^n s^{z-1}\left(1 - \frac{s}{n}\right)^n ds$
$\int_0^n s^{z-1}\left(1 - \frac{s}{n}\right)^n ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds = \Gamma(z)$
(W) γ - stała Eulera-Mascheroniego $:= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$
$z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \lim_{n\to\infty} z\, e^{z\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} =$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n^z\, n!} = \frac{1}{\Gamma(z)}$.
Uwaga. Stosując wzór (W) widzimy, że
$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)} = \frac{z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \cdot (-z) e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}}{-z}$
$= z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$

Wracamy do f-cji hol.

Uwaga 1 jeśli a jest biegunem f rzędu $k>0$ to a jest biegunem $\frac{f'}{f}$ rzędu 1 i $\mathrm{Res}_a \frac{f'}{f} = -k$.

Dowód $f(z) = (z-a)^{-k} g(z)$ g - reg. w a. $g(a) \neq 0$.

$$\frac{f'}{f} = \frac{-k(z-a)^{-k-1} \cdot g(z) + (z-a)^{-k} \cdot g'(z)}{(z-a)^{-k} \cdot g} = \frac{\overset{=\mathrm{Res}}{-k}}{(z-a)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Uwaga. jeśli jest zerem rzędu $k>0$ to a jest biegunem $\frac{f'}{f}$ rzędu 1 i $\mathrm{Res}_a \frac{f'}{f} = +k$. Dowód podobny.

Tw. $f: O \to \mathbb{C}$ - hol, $D \subset O$, na $\Gamma = \partial D$ f nie ma zer i osobliwości oraz wewnątrz D nie ma istotnych osobliwości.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = N_z - N_b$$

gdzie N_z - liczba zer. wewn. D licząc z krotnościami a N_b liczba biegunów f licząc z krotnościami

Dowód $\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \in D} \mathrm{Res}_z \frac{f'}{f} = N_z - N_b$ ← poprzednie Uwagi.

Tw. (Rouchego).
f, g nie mają bieg. na D, $|g| < |f|$ na ∂D wówczas liczba zer f wewnątrz D = liczba zer g wewn D (liczonymi z krotnością)

Dowód
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = N_z(f).$$

Rozważmy funkcję ciągłą $[0,1] \ni a \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f' + ag'}{f + ag} d\zeta = N_z(f + ag) \in \mathbb{N}$

a więc stałą. A stąd $N_z(f) = N_z(f+g)$.

Zasadnicze twierdzenie algebry.
$f = z^n$ $g = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.
Dla dużych $|z|$ $|f(z)| > |g(z)|$.
Z tw. Rouchego $N_z(f+g) = N_b(f) = n$ dla dost. duży $|z|$.