Przykład 1 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – przestrzeń funkcji próbnych

funkcje gładkie, nośnik zwarty: $\underbrace{\mathrm{supp}(f)}_{\text{nośnik } f} = \overline{\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0 \}}$

$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$

$\| f \|_N = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ |\beta| \leq N}} \left| \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f(x) \right|$

Niech $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ← przestrzeń dystrybucji

Jeśli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ to $f \cdot T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ t. że $(f \cdot T)(g) = T(fg)$. $\boxed{g \in D(\mathbb{R}^n)}$

Na przykład $f \cdot \delta_p$ (gdzie $p \in \mathbb{R}^n$) jest równy $f(p) \cdot \delta_p$

$(f \cdot \delta_p)(g) = \delta_p(f \cdot g) = f(p) g(p) = (f(p) \delta_p)(g)$

Zatem dla $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mamy równość $x \delta_0 = 0 \cdot \delta_0 = 0$.

Problem. Wykazać, że jeśli $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ spełnia $x \cdot T = 0$, to istnieje stała $\lambda \in \mathbb{R}$ t. że $T = \lambda \delta_0$.

<u>Krok 1</u> Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ t. że $f(0) = 0$. Wówczas istnieje $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ t. że $f(x) = x\, g(x)$. Ponadto (f ma zwarty nośnik) $\Leftrightarrow$ (g ma zwarty nośnik)

Konstrukcja g. $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = x \underbrace{\int_0^1 f'(tx)\, dt}_{g(x)} = x \cdot g(x)$.

<u>Krok 2</u> Niech $f \in D(\mathbb{R})$ oraz $\psi \in D(\mathbb{R})$ t. że $\psi(0) = 1$. Wtedy $f(x) - f(0) \cdot \psi(x) \Big|_{x=0} = 0$. Niech $g \in D(\mathbb{R})$: $f(x) - f(0) \cdot \psi(x) = x\, g(x)$

Zatem $T(f) = T(\underbrace{f - f(0) \cdot \psi}) + T(f(0) \cdot \psi) =$

$= T(x\, g(x)) + f(0)\, T(\psi) = \underset{\lambda}{T(\psi)}\, f(0) = \lambda \delta_0(f)$, i $T = \lambda \delta_0$.

$x T(g) = 0$

Wariacja #1. Znaleźć wszystkie dystrybucje $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t. że $x^k T = 0$ dla pewnego k.

Wariacja #2. $w \in \mathbb{R}_k[\cdot]$. Rozwiązać r-nie $w \cdot T = 0$.

Wróćmy do wyjściowego problemu: $x \cdot T = 0$. Niejednorodna wersja tego r-nia, na przykład $x \cdot T = 1$ (*) $1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx$

$RORNJ \overset{(*)}{=} RORJ + RSRNJ = \mathbb{R} \delta_0 + RSRNJ = \mathbb{R}\delta_0 + vp\left(\frac{1}{x}\right)$

Przypomnienie $vp\left(\frac{1}{x}\right)(g) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(x)}{x}\, dx \right) =$

$= \{ \mathrm{supp}\, g \subset [-R, R] \} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{g(x) - g(0)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{g(x) - g(0)}{x}\, dx$.

$= \int_{-R}^{R} \frac{g(x) - g(0)}{x}\, dx$

Przykładem RSRNJ (*) jest dystrybucja $vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\underbrace{x \cdot vp\left(\frac{1}{x}\right)}(g) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{g(x)\, x}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)\, x}{x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = T_1(g) = 1(g)$

Wzory Sochockiego. Rozważmy dystrybucję zadaną wzorem $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x + i\varepsilon}\, dx$. Jeśli dystrybucja jest sensowna to jest ona RSRNJ

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{x+i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-R}^{R}\frac{g(x)}{x+i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{g(x)-g(0)}{x+i\varepsilon}}_{\downarrow\,\varepsilon\to 0^+ \atop vp\left(\frac{1}{x}\right)(g)} + \int_{-R}^{R}\frac{g(0)}{x+i\varepsilon} = vp\left(\frac{1}{x}\right)(g) + \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x+i\varepsilon}}_{= -i\pi}\cdot\delta_0(g)$$

$\mathrm{supp}(g)\subset[-R,R]$

Zauważmy, że $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x+i\varepsilon} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-R}^{R}\frac{(x-i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}dx}_{=0} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_{-R}^{R}\frac{\varepsilon\, dx}{x^2+\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{-R}^{R}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(-i)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) = -i\pi$$

Podsumowując
Podobnie

$$\left.\begin{cases}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\varepsilon} = vp\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_0. \\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x-i\varepsilon} = vp\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_0.\end{cases}\right\}$$ – Wzory Sochockiego.

Związek z fizyką.

Całka wiodąca. $\int_{-\infty}^{+\infty}dE\int_{0}^{\infty}f(E)e^{-iEt}dt$

$\int_0^\infty e^{-(\varepsilon+iE)t}dt = -\frac{1}{(\varepsilon+iE)}e^{-(\varepsilon+iE)t}\Big|_0^\infty$

$\frac{1}{iE+\varepsilon} = \frac{-i}{E-i\varepsilon}$

Regularyzacja całki: $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}dE\int_{0}^{\infty}f(E)e^{-iEt-\varepsilon t}dt$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(E)}{E-i\varepsilon} = -i\left(vp(f) + i\pi\delta_0(f)\right).$$

Niech $O\subset\mathbb{R}^n$ – podzbiór otwarty. Rozważmy funkcje próbne na O tzn

$D(O) = \{f\in D(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}(f)\subset O\}$ Oczywiście $D(O)\subset D(\mathbb{R}^n)$.

W szczególności mówimy, że $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D(O)$ jest zbieżny do $f\in D(O)$,

jeśli istnieje $K\subset O$ t. że $\mathrm{supp}(f_n)\subset K$ oraz
zwarty

dla każdego N $\|f_n - f\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\mathcal{D}(O) = \{T : D(O)\to\mathbb{R}$. T-liniowe i ciągłe$\}$

Zauważmy, że jeśli $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ to $T|_{D(O)}\in\mathcal{D}(O)$. Oznaczamy $T|_O$

Przykład $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – ciągła oraz $O\subset\mathbb{R}^n$ to $T_f|_O = T_{f|_O}$

Mówimy, że T znika na O jeśli $T|_O = 0$.

Uwaga: $\forall_T$ Istnieje maksymalny (ze względu na zawieranie) zbiór otwarty $\Omega\subset\mathbb{R}^n$

t. że $T|_\Omega = 0$. Nośnikiem T nazywamy $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ i oznaczamy

$\mathrm{supp}\, T$.

Przykład 1. $\mathrm{supp}\,\delta_p = \{p\}$. gdyż $\Omega = \mathbb{R}^n\setminus\{p\}$ czyli $\mathrm{supp}\,\delta_p = \{p\}$.

Przykład 2. Jeśli $f\cdot T = 0$ to $\mathrm{supp}\, T\subset\{x : f(x) = 0\}$.

W szczególności $x\cdot T = 0$ to $\mathrm{supp}\, T = \{0\}$.

wiemy że $T = \lambda\cdot\delta_0$, konsystentne z