$$S(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto \mathcal{F}(f) \in S(\mathbb{R}^n)$$

gdzie $(\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx} dx$

<u>Tw</u> $\left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(k) e^{ikx} dk$

Dowód:

① $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) \stackrel{?}{=} f$ (podobnie dowodzi się że $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = f$.

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(k) e^{+ikx} dk = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} dk \left(\int_{\mathbb{R}^n} dy\, f(y)\, e^{-iky} \right) e^{ikx}$$

$$\lim_{a\to 0+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int dk\, e^{-\frac{ak^2}{2}} \int dy\, f(y)\, e^{-ik(y-x)} = \lim_{a\to 0+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int dy\, f(y) \int dk\, e^{-\frac{ak^2}{2} - ik(y-x)}$$

$$= \lim_{a\to 0+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n \int dy\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2a}} \cdot f(y) = \left\{ \begin{array}{l} u = (y-x)\frac{1}{\sqrt{a}} \\ dy = (\sqrt{a})^n du \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{a\to 0+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n \cdot (\sqrt{a})^n \int du\, e^{-\frac{u^2}{2}} f(x + \sqrt{a}\cdot u) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot f(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot f(x) \left(\sqrt{2\pi}\right)^n = f(x).$$

$\blacksquare$

Wniosek: $f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k) \cdot e^{ikx} dk.$

Zasada nieoznaczoności:

$$S(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto \hat{x} \cdot f \in S(\mathbb{R}^n)$$
$$\ni f \longmapsto \hat{p} f \in S(\mathbb{R}^n)$$

gdzie $(\hat{x} f)(x) \equiv x f(x)$

$(\hat{p} f)(x) = \frac{\hbar}{i} f'(x).$

rel. komut. $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. $(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) f(x) = x \cdot \frac{\hbar}{i} f'(x) - \frac{\hbar}{i} \underbrace{(xf)'}_{f + xf'}(x)$

$$= -\frac{\hbar}{i} f(x) = i\hbar \cdot f(x) \quad \forall f \in S(\mathbb{R})$$

Jeśli $A, B\ S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ są takie, że

$\forall f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ mamy $\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} (Ag)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{Bg(x)} f(x) dx$

to mówimy B jest operatorem sprzężonym do A i piszemy $A^* = B$

Iloczyn skalarny na $S(\mathbb{R}^n)$: $(f|g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$

W szczególności $(f|Ag) = (A^* f|g)$.

Zauważmy, że $(f|A^*A f) = (Af|Af) \geq 0.$

Oznaczenie: ustalmy funkcję $f \in S(\mathbb{R})$ i zdefiniujmy $\langle A \rangle_f = (f|Af)$.

$(f|f) = 1$

$$\sigma_f^2(A) = \langle (A - \langle A \rangle_f)^2 \rangle_f$$

Wniosek: $f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F} f)(k) \cdot e^{ikx} \, dk$.

Zasada nieoznaczoności:

$S(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \hat{x} \cdot f \in S(\mathbb{R})$

$\ni f \longmapsto \hat{p} f \in S(\mathbb{R})$ gdzie $(\hat{x} f)(x) = x f(x)$

$(\hat{p} f)(x) = \frac{\hbar}{i} f'(x)$.

rel. komut. $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. $(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) f(x) = x \cdot \frac{\hbar}{i} f'(x) - \frac{\hbar}{i} \underbrace{(xf)'}_{f + xf'}(x)$

$= -\frac{\hbar}{i} f(x) = i\hbar \cdot f(x) \quad \forall f \in S(\mathbb{R})$

Jeśli $A, B\; S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ są takie, że

$\forall f, g \in S(\mathbb{R})$ mamy $\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} (Ag)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{Bg(x)} f(x) \, dx$

to mówimy B jest operatorem sprzężonym do A i piszemy $A^* = B$.

Iloczyn skalarny na $S(\mathbb{R})$: $(f|g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) \, dx$

W szczególności $(f|Ag) = (A^* f|g)$.

Zauważmy, że $(f|A^* A f) = (Af|Af) \geq 0$.

Oznaczenie: ustalmy funkcję $\underbrace{f \in S(\mathbb{R})}_{(f|f)=1}$ i zdefiniujmy $\langle A \rangle_f = (f|Af)$

$\sigma_f^2(A) = \langle (A - \langle A \rangle_f)^2 \rangle_f$

Twierdzenie Niech $A, B : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ & $A^* = A$, $B^* = B$.

Niech $C = \frac{1}{i}[A, B]$ i $f \in S(\mathbb{R})$, $(f|f) = 1$.

Wówczas $\sigma_f(A) \cdot \sigma_f(B) \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle_f|$

Uwaga: $C^* = C$. i w szczególności $\langle C \rangle_f \in \mathbb{R}$.

Dowód: Bez straty ogólności możemy założyć że $\langle A \rangle_f = \langle B \rangle_f = 0$

Rozważmy operator $G_t = A + itB$ $t \in \mathbb{R}$. Wówczas $G_t^* = A - itB$.

Stąd $0 \leq \langle G_t^* G_t \rangle_f = (f|(A - itB)(A + itB) f) = (f|A^2 f) + t^2 (f|B^2 f) +$

$+ t (f|i[A,B] f) = \sigma_f^2(A) + t^2 \sigma_f^2(B) - t \langle C \rangle_f$ – dodatni wielomian od t.

$0 \geq \Delta = (\langle C \rangle_f)^2 - 4 \cdot \sigma_f^2(A) \sigma_f^2(B)$

a stąd $\sigma_f^2(A) \sigma_f^2(B) \geq \frac{\langle C \rangle_f^2}{4}$. ∎

Kładąc $A = \hat{x}$, $B = \hat{p}$ mamy $\hat{C} = \hbar$ a zatem

$\boxed{\sigma_f(\hat{x})\, \sigma_f(\hat{p}) \geq \frac{\hbar}{2}}$ – zasada nieoznaczoności Heisenberga.

Tożsamość Plancherela: Rozważmy funkcję $\psi(x,k) = e^{-ikx} f(x) \overline{g(k)}$

gdzie $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} dx\,dk\, \psi(x,k) = \int_{\mathbb{R}^n} dk\, \overline{g(k)} \int_{\mathbb{R}^n} dx\, f(x) e^{-ikx} = (g|\mathcal{F} f)$

$\int dx \left(\int \bar{g}(k) e^{-ikx} dk\right) f(x) = \int dx\, \overline{\int g(k) e^{ikx} dk} \cdot f(x) = (2\pi)^n (\mathcal{F}^{-1} g|f)$

$f(b) - f\langle C\rangle_f$ – dodatnim niezależnym od f.

Zatem $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ mamy $(\mathcal{F}f \mid \mathcal{F}f) = (2\pi)^n (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f \mid f)$

$= (2\pi)^n (f \mid f)$.

Innymi słowy $\overbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}}^{\text{operator}} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$

jest unitarny.

Kartkówka

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{6}}\,dx}{(x+1)(x+2)} = ?$$

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x+1)(x+2)}\,dx = ??$$