M – rozmaitość różniczkowa

$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ – rozmaitość różniczkowa.

$\varphi = (x^1, \dots, x^n)$

$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\{\partial_i^\varphi(p) : i = 1, \dots, n\}$ – baza p-ni stycznej

$[\gamma] = v \in TM \rightsquigarrow D_v$ – op. różn. 1-go rzędu $\quad D_v(f) = (f \circ \gamma)'(0)$

$\downarrow$

$(p, D_v(x^1), \dots, D_v(x^n))$

$$v = \sum_{i=1}^{n} D_v(x^i)\, \partial_i^\varphi(p)$$

Alternatywna notacja: $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$

Pole wektorowe:
$$\begin{tikzcd} TM \arrow[d, "\pi"'] \\ M \arrow[u, bend right, "X"'] \end{tikzcd}$$

$\pi \circ X(p) = p$ lub $\pi \circ X = id.$

We współrzędnych:

$$X|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i^\varphi$$

∂_i^φ jest lokalnym polem wektorowym.

Pola wektorowe są operatorami różniczkowymi 1-go rzędu t.zn. jeśli $f \in C^\infty(M)$ oraz $X \in \mathfrak{X}(M)$ to funkcję $M \ni p \mapsto X(p)(f) \in \mathbb{R}$ oznaczamy $X(f)$. Zatem $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ oraz spełnia regułę Leibniza: $X(fg) = X(f)g + X(g)f$

Komutator pól wektorowych.

$C^\infty(M)$ jest p-nią wektorową. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zadają endomorfizmy pni $C^\infty(M)$. Komutator X oraz Y jest endomorfizmem $C^\infty(M)$ zadanym wzorem

$$C^\infty(M) \ni f \longmapsto X(Y(f)) - Y(X(f)) \in C^\infty(M)$$

oznaczanym symbolem $[X, Y]$.

Stwierdzenie

$[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$

Dowód:

Sprawdzamy, że $[X, Y]$ spełnia reg. Leibniza.

$$X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) =$$

$$X(Y(f))g + \cancel{Y(f)X(g)} + \cancel{X(f)Y(g)} + fX(Y(g))$$

$$- Y(X(f))g - \cancel{X(f)Y(g)} - \cancel{Y(f)X(g)} - fY(X(g)) = [X,Y](f)\, g + f \cdot [X,Y](g).$$

Komutator pól wektorowych.

$C^\infty(M)$ jest p-nią wektorową. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zadaje endomorfizmy przy $C^\infty(M)$. Komutator X oraz Y jest endomorfizmem $C^\infty(M)$ zadanym wzorem

$$C^\infty(M) \ni f \longmapsto X(Y(f)) - Y(X(f)) \in C^\infty(M)$$

oznaczonym symbolem $[X,Y]$.

Stwierdzenie

$[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$

Dowód:

Sprawdzamy, że $[X,Y]$ spełnia reg. Leibniza.

$$X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) =$$

$$X(Y(f))\,g + \cancel{Y(f)X(g)} + \cancel{X(f)Y(g)} + f\,X(Y(g))$$

$$- Y(X(f))\,g - \cancel{X(f)Y(g)} - \cancel{Y(f)X(g)} - f\,Y(X(g)) = [X,Y](f)\cdot g + f\cdot[X,Y](g)$$

Komutator we współrzędnych.

Stwierdzenie

① $[\partial_i^\varphi, \partial_j^\varphi] = 0$.

② $X = \sum X^i \partial_i^\varphi$, $Y = \sum_j Y^j \partial_j^\varphi$ to

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(X^i \partial_i^\varphi(Y^j) - Y^i \partial_i^\varphi(X^j)\right) \partial_j^\varphi$$

Dowód 1

$$\partial_i^\varphi(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(f\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi.$$

$$\partial_i^\varphi(\partial_j^\varphi f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} f\circ\varphi^{-1}\right)\circ\cancel{\varphi\circ\varphi^{-1}}\right)\circ\varphi$$

$$= \left(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{przemienne}}(f\circ\varphi^{-1})\right)\circ\varphi \Rightarrow ①.$$

Konwencja sumacyjna Einsteina

② $[X^i \partial_i^\varphi, Y^j \partial_j^\varphi](f) = X^i(\partial_i(Y^j(\partial_j f))) - Y^j \partial_j(X^i(\partial_i(f)))$

$= \cancel{X^i Y^j \partial_i(\partial_j(f))} + X^i \partial_i(Y^j)\,\partial_j(f)$

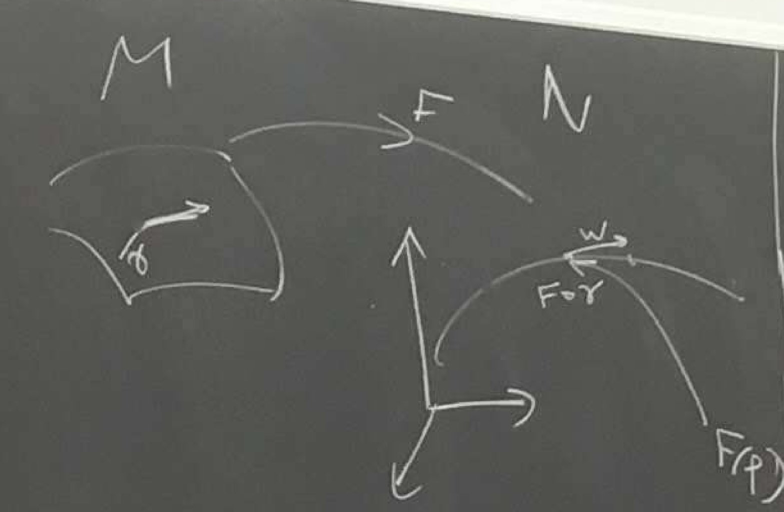
$- \cancel{Y^j X^i \partial_j \partial_i(f)} - Y^j \partial_j(X^i)\,\partial_i f.$

$= X^i \partial_i(Y^j)\,\partial_j - Y^j \partial_j(X^i)\,\partial_i$

$\boxed{\text{K.S. Einsteina} \quad a^i b_i = a^j b_j}$

Niech $p \in M$ oraz $v = [\gamma] \in T_p M$.

Wektor $w = [F \circ \gamma] \in T_{F(p)} N$ oznaczamy $T_p F(v)$. W szczególności, definiuje to odwzorowanie z $T_p M$ do $T_{F(p)} N$.



Co się dzieje we współrzędnych?

$\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ - współrzędne na M wokół p

$\gamma^i = x^i \circ \gamma$; $\begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \vdots \\ \gamma^n \end{pmatrix} = \varphi \circ \gamma$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0).$$

$\tilde{\varphi}$ - współrzędne na N wokół $F(p)$

$w \in T_{F(p)} N$ we współrzędnych.

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = (\tilde{\varphi} \circ F \circ \gamma)'(0) = (\tilde{\varphi} \circ F \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))(\varphi \circ \gamma)'(0)$$

Wniosek: $T_p F : T_p M \to T_{F(p)} N$ jest odwzorowaniem liniowym.

Nazywamy je pochodną odwzorowania F w punkcie p.

Przykład.

Niech $N = \mathbb{R}$. $T_t \mathbb{R} = \mathbb{R} \frac{d}{dx}(t) \simeq \mathbb{R}$

Niech $f : M_{\ni q} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką.

Wtedy $T_p f : T_p M \to T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Czyli $T_p f \in (T_p M)^*$

Oznaczenie $T_p f = df(p) \in (T_p M)^*$.

$\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ $\quad \langle dx^i(p), \partial_j^{\varphi}(p) \rangle = \{ \gamma(t) = (x^1(p), \dots, x^j(p) + t, \dots, x^n(p)) \} = \delta^i_j$

Wniosek

Układ kowektorów $(dx^1(p), \dots, dx^n(p))$ jest bazą $(T_p M)^*$ dualną do bazy $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right)$ przy $T_p M$.

Wiązka kostyczna $T^* M = \bigsqcup_{p \in M} (T_p M)^*$

współrzędne na $T^* M$:

$T^* M \ni \theta \longmapsto (\varphi(p), \theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ oraz

1) $\theta \in T_p^* M$ i $\theta = \theta^1 dx^1(p) + \dots + \theta^n dx^n(p)$