$p \in M$, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ $\quad \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pM$, baza $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\right)$

$f \in C^\infty(M)$ $\quad df(p) \in T_pM^*$ $\quad \langle df(p), \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \rangle = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)(p)}_{\text{we wsp}}$

T^*M – wiązka kostyczna $= \bigsqcup_{p \in M} (T_pM)^*$ baza sprzężona $\langle dx^1(p), \dots, dx^n(p) \rangle$

$\overset{\vee}{\theta} = \theta_1 dx^1(p) + \dots + \theta_n dx^n(p) \longmapsto (\varphi(p); \theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$T^*M \ni \theta \overset{\pi}{\longmapsto} p \in M$

Definicja

Odwzorowanie gładkie $\theta : M \longrightarrow T^*M$ t. że $\pi \circ \theta = id$ nazywamy 1-formą różniczkową na M.

We wsp. $\theta|_{\mathcal{U} \subset M} = \theta_1 dx^1 + \dots + \theta_n dx^n$ $\quad \theta_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ gładkie.

Dla każdego k rozważamy $\Lambda^k T_pM$ oraz zdefiniujmy wiązkę $\Lambda^k TM$ k-form na M. $\omega \in \Lambda^k T^*M$ ma (we wsp) postać

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(p)$$

Wiązka k-form $\Lambda^k TM = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k T_pM$ – rozmaitość różniczkowa wymiaru $n + \binom{n}{k}$ gdzie $n = \dim M$.

$\downarrow \pi$ – kanoniczne rzutowanie

M

Definicja. Odwzorowanie gładkie $\omega : M \to \Lambda^k TM$ t. że $\pi \circ \omega = id$ nazywamy k-formą różniczkową na M.

We wsp. $\omega = \sum_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ $\quad \omega_{i_1 \dots i_k} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ – gładkie.

Def. Zwężeniem k-formy różniczkowej $\omega \in \Omega^k(M)$ z $X \in \mathfrak{X}(M)$ nazywamy $(k-1)$-for. różn.

$\mathfrak{X}(M)$ – pola wekt.

$\Omega^k(M)$ – k-formy różn.

$i_X \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ gdzie

$(i_X\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$. dla $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$

Notacja $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$ gdzie $n = \dim M$ & $\Omega^0(M) \overset{def}{=} C^\infty(M)$

Stwierdzenie

① $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ jest liniowe oraz $i_X \overset{k}{\omega} \in \Omega^{k-1}(M)$.

(i_X ma stopień -1).

② $i_X(\overset{k}{\omega} \wedge \overset{l}{\eta}) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_X\eta)$

(i_X jest superróżniczkowaniem)

Dowód ②: $\overset{k}{\omega} = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k$, $i_X(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k)(X_1, \dots, X_{k-1}) =$

uwaga $\theta^i \in \Omega^1(M)$ (a nie wsp)

$$= \det \begin{bmatrix} \theta^1(X), \dots, \theta^1(X_{k-1}) \\ \vdots \\ \theta^k(X), \dots, \theta^k(X_{k-1}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \theta^i(X) (\theta^1 \wedge \dots \wedge \underbrace{\widehat{\theta^i}}_{\text{pomijamy składową 1-formy}} \wedge \dots \wedge \theta^k)(X_1, \dots, X_{k-1})$$

zatem $i_X \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \theta^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\theta^i} \wedge \dots \wedge \theta^k$.

Niech $\eta = \theta^{k+1} \wedge \dots \wedge \theta^{k+l}$. Wówczas $i_X(\overset{k}{\omega} \wedge \overset{l}{\eta}) = \sum_{i=1}^{k+l} (-1)^{i+1} \theta^i(X) \theta^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\theta^i} \wedge \dots \wedge \theta^{k+l}$

$= \underbrace{(i_X \overset{k}{\omega})}_{\text{sumowanie od } 1 \dots k} \wedge \overset{l}{\eta} + \overset{k}{\omega} \wedge \sum_{i=1}^{l} (-1)^{k+i+1} \theta^{k+i}(X)\, \theta^{k+1} \wedge \dots \wedge \widehat{\theta^{k+i}} \wedge \dots \wedge \theta^{k+l} =$

$= i_X \overset{k}{\omega} \wedge \eta + (-1)^k \overset{k}{\omega} \wedge i_X \eta$ $\blacksquare$.

Pochodna zewnętrzna formy różniczkowej.

Różniczkowanie zero form. $f \in \Omega^0(M)$ to $df \in \Omega^1(M)$.

We wsp. $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$.

<u>Twierdzenie</u> Istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ stopnia 1 które jest superróżniczkowaniem t. że $d \circ d = 0$ oraz d na $\Omega^0(M)$ pokrywa się z poprzednią definicją $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$.

<u>Dowód</u>. Jednoznaczność

Obserwacja 1. $V \underset{otw}{\subset} M$ oraz $\omega^1, \omega^2 \in \Omega(M)$ spełniające $\omega^1|_V = \omega^2|_V$ wtedy $d\omega^1|_V = d\omega^2|_V$. Niech $p \in V$ oraz $h : M \to \mathbb{R}$ t. że $h|_{\mathcal{U}} = 1$ dla pewnego $\mathcal{U} \subset V \subset M$, $p \in \mathcal{U}$ i $h = 0$ poza V.

Zauważmy $h\omega^1 = h\omega^2$ a stąd

$d h\omega^1(p) = d h\omega^2(p)$

$h(p) d\omega^1(p) + (dh)(p) \wedge \omega^1(p) = h(p) d\omega^2(p) + dh(p) \wedge \omega^2(p)$

Obserwacja 2. lokalnie $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

Zatem $d\omega \overset{\text{lokalnie}}{=} \sum d(\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \sum d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$+ \sum \omega_{i_1 \dots i_k} \underbrace{d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})}_{= 0}$

Istnienie.

Niech $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subseteq_{otw} M$ wsp na $\mathcal{U}$.

Na $\Omega^*(\mathcal{U})$ definiujemy $d^\varphi : \Omega^*(\mathcal{U}) \to \Omega^*(\mathcal{U})$ wzorem

$$d^\varphi \omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

① d^φ jest liniowe stopnia 1 (oczywiste).

② jest super różniczkowaniem:

$$d^\varphi(\omega \wedge \eta) = d^\varphi\Big(\sum \omega_{i_1 \ldots i_k} \eta_{j_1 \ldots j_l} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}\Big)$$

$$= \sum d(\omega_{i_1 \ldots i_k} \eta_{j_1 \ldots j_l}) \wedge \text{———} \;'' \text{———} \;'' \text{———}$$

$$= \sum \big((d\omega_{i_1 \ldots i_k}) \eta_{j_1 \ldots j_l} + \omega_{i_1 \ldots i_k} \, d\eta_{j_1 \ldots j_l} \big) \wedge \ldots '' \ldots \text{———}$$

$$= d^\varphi \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d^\varphi \eta.$$

③ $d^\varphi \circ d^\varphi = 0$: $\quad d^\varphi \sum (d^\varphi \omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})$

$$= d^\varphi \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ j}} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ j_1, j_2}} \underbrace{\frac{\partial^2 \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{j_2} \partial x^{j_1}}}_{\substack{\text{symetria} \\ j_1 \leftrightarrow j_2}} \underbrace{dx^{j_2} \wedge dx^{j_1}}_{\substack{\text{antysymetria} \\ j_1 \leftrightarrow j_2}} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

Niech $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^n$ – ukł. wsp.

$$d^{\hat{\varphi}} : \Omega^*(\hat{\mathcal{U}}) \to \Omega^*(\hat{\mathcal{U}}).$$

Z jednoznaczności obcięcia d^φ i $d^{\hat{\varphi}}$ do $\Omega^*(\mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{U}})$ są równe. A zatem $\exists$ d na $\Omega^*(M)$ które we wsp. -ędnych ma postać $d\omega = \sum d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$