$\omega \in \Omega^k(M)$

$d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$, $d^2\omega = 0$

$d(f\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$

gdzie $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ – gładka a $(x^1, \ldots, x^n)$ – współ. na $\mathcal{O}$.

oraz $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$.

Definicja Niech $\omega \in \Omega^k(M)$. Mówimy, że ω jest zamknięta jeśli $d\omega = 0$. Przestrzeń wektorową form zamkniętych oznaczamy $Z^k(M)$.

Mówimy, że $\omega \in \Omega^k(M)$ jest zupełna jeśli $\exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(M)$ t. że $\omega = d\eta$. Przestrzeń zupełnych form oznaczamy $B^k(M)$.

Uwaga: ponieważ $d^2 = 0$ to $B^k(M) \subset Z^k(M)$.

$d\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{-2x\,dx - 2y\,dy}{(x^2+y^2)^2}$

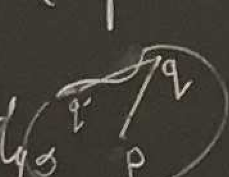
Przykład $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\omega \in \Omega^1(\mathcal{O})$. $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

$d\omega = \frac{2\, dx \wedge dy}{x^2+y^2} - 2\frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^2} \wedge (x\,dy - y\,dx)$

$= \frac{2\, dx \wedge dy}{x^2+y^2} - 2\frac{(x^2+y^2)\, dx \wedge dy}{(x^2+y^2)^2} = 0.$

ω jest formą zamkniętą. Dalej udowodnimy, że nie jest zupełna.

Definicja Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ oraz $p \in \mathcal{O}$. Mówimy, że $\mathcal{O}$ jest gwiaździsty względem p jeśli $\forall q \in \mathcal{O}$ $\{p + t(q-p) : t \in [0,1]\} \subset \mathcal{O}$.

Na przykład jeśli $\vec{0} \in \mathcal{O}$ to $\mathcal{O}$ jest gwiaździsty  względem zera jeśli $\forall q \in \mathcal{O}$. $t \cdot q \in \mathcal{O}$ dla $t \in [0,1]$

Twierdzenie (Lemat Poincaré)

Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym zbiorem gwiaździstym względem $p \in \mathcal{O}$. Wówczas $B^k(\mathcal{O}) = Z^k(\mathcal{O})$. $\{d\omega = 0$ to $\exists\, \eta : \omega = d\eta\}$

Dowód: Niech $I : \Omega^k(\mathcal{O}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{O})$ będzie liniowym odwzorowaniem t. że $I(f \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) =$

Bez straty ogólności $\vec{p} = \vec{0}$.

$$(*) = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \cdot \int_0^1 t^{k-1} f(tx)\,dt \cdot x^{i_\alpha}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Udowodnimy, że I spełnia tożsamość:

$I d\omega + dI\omega = \omega$. W szczególności jeśli $d\omega = 0$ to $\omega = d\eta$ gdzie $\eta = I\omega$.

$$dI\omega = d(*) = k \cdot \int_0^1 t^{k-1} f(tx)\,dt\; dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} + \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_0^1 t^k (\partial_j f)(tx)\,dt}_{\text{gładkie}}\, x^{i_\alpha}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$


Całkowanie k-form po gładkich singularnych k-łańcuchach.
Definicja Standardowym k-sympleksem w $\mathbb{R}^k$ nazywamy zbiór
$\Delta^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} x_i \leq 1\}$.
Δ^k jest powłoką wypukłą wierzchołków:
$(0, e_1, \dots, e_k)$ gdzie $(e_i : i=1 \dots k)$ baza standardowa $\mathbb{R}^k$
Definicja M - rozmaitość. Odwzorowanie $\sigma : \Delta^k \to M$ gładkie będziemy nazywać gładkim singularnym k-sympleksem w M
Niech $\omega \in \Omega^k(M)$ i $\sigma : \Delta^k \to M$ będzie gsksem.
Niech $f : \Delta^k \to \mathbb{R}$ t. że $\sigma^*\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ gdzie $(x^1 \dots x^k)$ wsp. kart. na $\mathbb{R}^k$. Całkę z ω po σ nazywamy $\int_{\Delta^k} f(x)\, dx^1 dx^2 \dots dx^k$
i oznaczamy symbolem $\int_\sigma \omega$
Dane: $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ - gsksy. oraz $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}$
Definicja. Gładkim singularnym k-łańcuchem nazywamy formalną kombinację liniową $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \sigma_i$