X - p-ń Banacha = wektorowe, unormowana, zupełna (nad $\mathbb{C}$)

$X^* = \{ \varphi : X \to \mathbb{C} : \varphi$ - liniowy, ciągły $\}$.

ciągłość φ = ograniczoność φ $\qquad \underbrace{\sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|}_{\|\varphi\|_{X^*} \text{ ozn}} < \infty$.

Uwaga $(X^*, \| \|_{X^*})$ jest p-nią Banacha.

Niech teraz $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Ustalmy $x \in \mathcal{H}$ i rozważmy funkcjonał liniowy $\varphi_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dany $\varphi_x(y) = \langle x | y \rangle$.

φ_x jest ograniczony oraz $\|\varphi_x\| = \|x\|$

Rzeczywiście, z nier. Cauchy-Schwarza $\sup_{\|y\|=1} |\varphi_x(y)| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x | y \rangle| \leq \sup_{\|y\|=1} \|x\| \cdot \|y\| = \|x\|$

zatem $\|\varphi_x\| \leq \|x\|$ Ponadto $\|\varphi_x\| \geq |\varphi_x(\frac{x}{\|x\|})| = |\langle x | \frac{x}{\|x\|} \rangle| = \|x\|$. I mamy równość

Przykład: Jeśli $L^2(\mathbb{R}) \ni f$ to $\varphi_f(g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$.

Lemat Riesza.

Dla każdego funkcjonału $\varphi \in \mathcal{H}^*$ istnieje dokładnie jeden wektor $x \in \mathcal{H}$ taki, że $\varphi = \varphi_x$.

Dowód: $\mathcal{K} = \ker \varphi$ - domknięta podprzestrzeń $\mathcal{H}$. W szczególności $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$.

Bez straty ogólności $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$. Niech $x_0 \in \mathcal{K}^\perp$ & $\|x_0\| = 1$.

Niech $y \in \mathcal{H}$. Wówczas $y - \varphi(y)\frac{x_0}{\varphi(x_0)} \in \mathcal{K}$. Zatem

$$\varphi_{x_0}(y) = \varphi_{x_0}\Big(\underbrace{y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}\cdot x_0}_{\in\,\mathcal{K}^\perp} + \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}\cdot x_0\Big) = \Big\langle x_0 \Big| \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}\cdot x_0\Big\rangle = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}$$

i w końcu $\varphi_{\overline{\varphi(x_0)}\cdot x_0}(y) = \langle \overline{\varphi}(x_0)\cdot x_0 | y\rangle = \varphi(x_0)\langle x_0|y\rangle = \varphi(y)$.

czyli $\varphi_{\overline{\varphi(x_0)}\cdot x_0} = \varphi$ i ~~wskazaliśmy~~ $x = \overline{\varphi}(x_0)x_0$.

Definicja. Mówimy, że operator $T: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ jest ograniczony jeśli $\underbrace{\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|}_{\overset{\text{ozn}}{=}\|T\|} < \infty$

Uwaga: T ogr $\Leftrightarrow$ T ciągły w $0 \Leftrightarrow$ T ciągły.

Hermitowskie sprzężenie operatora ograniczonego $T: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$.

Zauważmy, że $\forall x\in\mathcal{H}$ odwzorowanie $\mathcal{H}\ni y \longmapsto \langle x|Ty\rangle \in \mathbb{C}$ jest elementem $\mathcal{H}^*$. Z lematu Riesza $\exists!\ \tilde{x}\in\mathcal{H}$ t. że $\langle x|Ty\rangle = \langle\tilde{x}|y\rangle$ dla wszystkich y. $\tilde{x}$ oznaczamy symbolem T^*x: $\langle x|Ty\rangle = \langle T^*x|y\rangle$.

Łatwo sprawdzić, że $\|T^*\| = \|T\|$: $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup_{\substack{\|y\|=1\\ \|x\|=1}}|\langle y|Tx\rangle|$

$= \sup|\langle T^*y|x\rangle| = \|T^*\|$.

Stwierdzenie $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

D:

Dowód Zachodzi nierówność $\|T_1 T_2\| \le \|T_1\| \, \|T_2\|$

zatem $\|T^*T\| \le \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$. W drugą stronę:

$$\|T^*T\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |\langle y | T^*Tx \rangle| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |\langle Ty | Tx \rangle| \ge \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx | Tx \rangle| .$$

$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2$

Spektrum operatora T $\quad sp(T) = \{ z \in \mathbb{C} : z\mathbb{1} - T$ jest operatorem nieodwracalnym$\}$

Twierdzenie $\forall T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - ograniczonego $sp(T)$ jest niepustym i zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$

Dowód: Heurystyka $(z\mathbb{1} - T)^{-1} = \frac{1}{z}\left(\mathbb{1} - \frac{T}{z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{z^{n+1}}$ - szereg jest zbieżny gdy $\|\frac{T}{z}\| < 1$.

Jeśli $|z| > \|T\|$ to $z \notin sp(T)$. Ponadto odwzorowanie $\mathbb{C} \setminus sp(T) \ni z \mapsto (z-T)^{-1}$ jest holomorficzne w z. Uwaga: czy $\mathbb{C} \setminus sp(T)$ jest otwarte. Tak, ponieważ podzbiór odwracalnych operatorów jest otwarty w zbiorze wszystkich operatorów (dowód ćwiczenia).

Jeśli dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ mamy odwracalność $(z-T)$ to odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \longmapsto (z-T)^{-1}$ jest całkowite i znika w ∞. Z tw. Liouville jest ono stale równe zero $\lightning$. Czyli $sp(T) \neq \emptyset$ i jest to zbiór zwarty.

Operatory nieograniczone na p-ni Hilberta.

Przykład $L^2[0,2\pi] \supset \{ f \in C^1[0,2\pi] : f(0) = f(2\pi) \} \overset{\text{ozn}}{=} \mathcal{D}$.

Każdy wielomian trygonometryczny jest elementem p-ni $\mathcal{D}$.

W szczególności $\mathcal{D}$ jest gęstą liniową podprzestrzenią $L^2[0,2\pi]$.

Rozważmy operator $A : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ dany wzorem $Af = -i f'$;

A nie przedłuża się do ciągłego operatora na $\mathcal{H}$; $A \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$.

Niech $f, g \in \mathcal{D}$. $\langle f | A g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} (-i) g'(t)\, dt = -i\left(\overline{f(2\pi)} g(2\pi) - \overline{f(0)} g(0) - \int_0^{2\pi} \overline{f'(t)} g(t) \right.$

$= \int_0^{2\pi} \overline{-i f'(t)}\, g(t)\, dt = \langle A f | g \rangle$. Czy $A^* = A$? Jak definiować A^*?

Definicja Niech $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ będzie gęstą podprzestrzenią $\mathcal{H}$ oraz $A : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$. Definiujemy $\mathcal{D}(A^*)$: mówimy, że $x \in \mathcal{D}(A^*)$ jest funkcjonał liniowy $\mathcal{D} \ni y \longmapsto \langle x | A y \rangle \in \mathbb{C}$ jest ograniczony, tzn istnieje $C \in \mathbb{R}_+$ t. że $|\langle x | A y \rangle| \leq C \|y\|$. L. Riesza $\exists! \tilde{x} : \langle x | A y \rangle = \langle \tilde{x} | y \rangle$, ozn $\tilde{x} = A^* x$.