Równanie Laplace'a/Poissona. Funkcje harmoniczne.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - otwarty, $u: \Omega \to \mathbb{R}$. Mówimy, że $u \in C^2(\Omega)$ jest (1) harmoniczna na Ω jeśli $\Delta u = 0$. (2) subharmoniczna na Ω jeśli $\Delta u \leq 0$. (3) superharmoniczna jeśli $\Delta u \geq 0$

Równanie Laplace'a: Znaleźć funkcję ciągłą $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ t. że

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{na } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

gdzie $\varphi: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ - jest zadaną funkcją ciągłą.

Q: istnienie i jednoznaczność rozwiązań.

Równanie Poissona $f: \Omega \to \mathbb{R}$ zadana funkcja ciągła

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Przypomnienie twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego (o dywergencji div)

$\partial\Omega$ - rozmaitość klasy C^1 (wymiaru $n-1$).

Niech $w = (w_1, \dots, w_n)$ będzie polem wektorowym na Ω. Wówczas

$$\int_\Omega \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle n | w \rangle \, d\sigma$$

gdzie n - pole wektorów normalnych do $\partial\Omega$ skierowanych zewnętrznie, $\langle n | w \rangle = \sum_{i=1}^n n_i \cdot w_i$ oraz $d\sigma$ jest "naturalną" miarą na $\partial\Omega$. Czym jest $d\sigma$? Niech $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, $\eta = n \lrcorner \omega|_{\partial\Omega}$ - $n-1$ forma na $\partial\Omega$. Wówczas

$$\int_{\partial\Omega} \langle n | w \rangle \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle n | w \rangle \cdot \eta. \quad \boxed{|\eta| = d\sigma}$$

Przypomnienie twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego (o dywergencji div)

$\partial\Omega$ - rozmaitość klasy C^1 (wymiaru $n-1$).

Niech $w=(w_1,\dots,w_n)$ będzie polem wektorowym na Ω. Wówczas

(*) $\int_{\Omega} \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle n|w\rangle \, d\sigma$ gdzie n - pole wektorów normalnych do $\partial\Omega$ skierowanych zewnętrznie, $\langle n|w\rangle = \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot w_i$ oraz $d\sigma$ jest "naturalną" miarą na $\partial\Omega$. Czym jest $d\sigma$? Niech $\omega = dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$, $\eta = n \lrcorner \omega\big|_{\partial\Omega}$ - $n-1$ forma na $\partial\Omega$. Wówczas $\int_{\partial\Omega}\langle n|w\rangle \, d\sigma = \int_{\partial\Omega}\langle n|w\rangle \cdot \eta$. $\boxed{|\eta| = d\sigma}$

Miara na $S^2(0,1)$. Wsp. na sferze θ, φ.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \overset{\text{wsp}}{\underset{\text{kart}}{=}} [\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta] \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi} = [-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0].$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad \boxed{d\sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.}$$

$d\sigma$ na $S^2(0,r)$: $r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$.

W szczególności kładąc $w = \nabla u$ to $\operatorname{div}\nabla u = \Delta u$ oraz

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle n|\nabla u\rangle \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$$

Wniosek: jeśli u jest harmoniczna to $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0.$

Drugi wzór Gaussa (wniosek z (*)). wstawiając w do (*) dostajemy $u, v \in \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\quad w = u\nabla v - v\nabla u$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx \overset{(**)}{=} \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

Twierdzenie: Niech $u : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną. Wówczas $\forall y \in \Omega$ oraz $R < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$ mamy

$$u(y) \overset{(1)}{=} \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B(y,R)} u\,d\sigma \overset{(2)}{=} \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(y,R)} u\,dx,$$

wartość średnia u na ∂B | wartość średnia u na B

gdzie $\omega_n = \operatorname{vol} B(0,1)$.

Dowód: Dla $\rho < R$ rozważmy funkcję $\varphi(\rho) := \rho^{1-n} \int_{S^{n-1}(y,\rho)} u\,d\sigma(\omega)$

obserwacja: $\int_{S^{n-1}(0,1)} u(y+\rho\omega)\,d\sigma(\omega) \to u(y) \cdot$ Pole sfery S^{n-1}

$= u(y)\cdot(n\omega_n)$. Dla dowodu (1) wystarczy pokazać że $\varphi = \mathrm{const}$.

$$\frac{d}{d\rho}\varphi(\rho) = \int_{S^{n-1}(y,\rho)} \frac{\partial}{\partial\rho} u(y+\rho\omega)\,d\sigma = \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(y+\rho\omega)\,\omega_i\,dx = \int_{S^{n-1}} \langle \nabla u \mid n\rangle\,d\sigma$$

$$= \int_{B^n} \Delta u\,d\sigma = 0.$$

Równość (2) otrzymujemy z (1) całkując (1) względem R.

$$u(y)\int_0^R n\omega_n \rho^{n-1}\,d\rho = \int_0^R d\rho \int_{\partial B(y,\rho)} u\,d\sigma = \int_{B(y,R)} u\,dx.$$

Uwaga: podobnie dowodzimy, że jeśli u jest subharmoniczna to

$$u(y) \le \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B(y,R)} u\,d\sigma \quad \& \quad u(y) \le \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(y,R)} u\,dx.$$

Dla superharmonicznych mamy $\geq$

Tw Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie spójny otwarty & ogr. Oraz $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ będzie funkcją subharmoniczną. Wówczas jeśli u osiąga sup wewnątrz $\overline{\Omega}$ to u jest stała. (Wniosek dalej: równanie Laplace'a ma co najwyżej jedno rozwiązanie)

Dowód: $M = \sup_{\Omega} u$. $\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\} \neq \emptyset$, Ω_M - domknięty. Ω_M jest otwarty. (zatem $\Omega_M = \Omega$, oraz $u = M$). Niech $y \in \Omega_M$, $R < \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$.

Wówczas: $0 = u(y) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(y,R)} (u - M)\, dx \leq 0$, $\Rightarrow$ $u = M$ na $B(y,R) \subset \Omega_M$

Wniosek (1) u - harmoniczne $\forall y \in \Omega$ $\inf_{\partial\Omega} u \leq u(y) \leq \sup_{\partial\Omega} u$

(2) Jeśli $\Delta u = \Delta v$ oraz $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$ to $u = v$ na Ω.

Dowód $u - v$ - harmoniczne oraz $u - v|_{\partial\Omega} = 0$. $\Rightarrow u - v = 0$

(3) Równanie Poissona ma co najwyżej jedno rozwiązanie $\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$