Równanie Poissona

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega) \\ \varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R} \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \\ \Delta u = f \quad \text{w } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

$n : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$

pole wekt. normalnych zewnętrznych

Przypomnienie: jeśli rozwiązanie istnieje to jest tylko jedno

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

II-gi wzór Greena

Ustalmy $y \in \Omega$ i rozważmy

$$v(x) = \Gamma(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n = 2 \end{cases}$$

$$\nabla\Gamma = \frac{1}{n\omega_n}\frac{x-y}{|x-y|^n} \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$\Delta_x \Gamma = 0. \qquad x \neq y.$

Dla $x = y$ $\Gamma$ ma osobliwość

Dla $\rho > 0$ rozważmy $\Omega_\rho = \Omega \setminus B(y,\rho)$

$$-\int_{\Omega_\rho} \Delta_x u\, \Gamma(x-y)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial n} - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\right)d\sigma(x) + \int_{\partial B(y,\rho)} u(x)\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial n} - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\,d\sigma(x).$$

Przejście graniczne $\rho \to 0$: Lewa strona $-\int_\Omega \Delta_x u\,\Gamma(x-y)\,dx$

$$\left|\int_{\partial B_\rho}\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma(x)\right| \leq \rho\, C_n \cdot \sup_{\partial B_\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

$$-\frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho} u(x)\,d\sigma(x)$$

$n\omega_n\rho^{n-1}$ = miara sfery

$$\left.\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\right|_{\partial B_\rho} = \langle \nabla\Gamma \,|\, n\rangle = -\frac{1}{n\omega_n}\left\langle \frac{x-y}{|x-y|^n} \,\middle|\, \frac{x-y}{|x-y|}\right\rangle = -\frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}} \qquad \xrightarrow[\rho\to 0]{} \boxed{-u(y)}$$

Twierdzenie. Jeśli $u, \Gamma$ – j.w. to

$$u(y) = \int_\Omega \Delta_x u(x)\,\Gamma(x-y)\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial n} - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma(x).$$

Pozbędziemy się $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$ z powyższego wzoru.

Niech $h$ będzie funkcją harmoniczną na $\Omega$. Wówczas z II-go wzoru Gaussa.

$$(**)\quad 0 = \int_\Omega h\,\Delta u\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma.$$

$(*) + (**) \leadsto \quad G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x)$

$$u(y) = \int_\Omega \Delta u\, G\,dx + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma(x) - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,G(x,y)\,d\sigma(x).$$

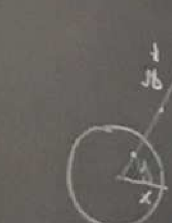
Uwaga: wybierając (dla danego $y$) $h_y$ tak aby: (1) $h_y$ była harmoniczna w $\Omega$ (2) $\Gamma(x-y) + h_y(x) = 0$ na $\partial\Omega$

dostajemy wzór $u(y) = \int_\Omega \Delta u\cdot G\,dx + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma(x),$

Funkcję $G$ j.w. nazywamy funkcją Greena zagadnienia Dirichleta dla obszaru $\Omega$.

<u>Stw</u> Jeśli $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ jest taka, że $\Delta u = f$ w $\Omega$ oraz $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ gdzie $f\in C^0(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ a $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$ to

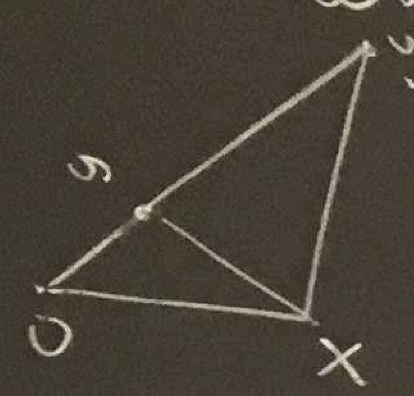
$$u(y) = \int_\Omega f\,G\,dx + \int_{\partial\Omega}\varphi\,\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma(x).$$



---

Funkcja Greena $\Omega = B(0,R)$: szukamy $h_y$ postaci $\frac{\alpha(y)}{n(2-n)\omega_n}|x-y^*|^{2-n}$ $y^*$ jest obrazem $y$ względem sfery $\partial B(0,R)$, $y^* = +\frac{R^2}{|y|^2}\cdot y$. $\Delta_x h_y(x) = 0$ na $B(0,R)$

Określamy $\alpha(y)$ tak aby $\Gamma(x-y) + h_y(x) = 0^{(***)}$ $x \in \partial B(0,R)$.



Trójkąt$(0,x,y) \underset{0}{\sim}$ Trójkąt $(0,y^*,x)$

Dla $y \neq 0$.

w szczególności $\frac{|y|}{|x|} = \frac{|x|}{|y^*|}$, $\frac{|y^*-x|}{|y-x|} = \frac{R}{|y|}$

$$(***): \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} = -\frac{\alpha(y)}{n(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x-y^*|^{n-2}} \Rightarrow \alpha(y) = -\frac{|x-y^*|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}} = -\frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}}$$

$$\underbrace{h_y(x) = -\frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}\, n(2-n)\omega_n} \cdot |x-y^*|^{2-n}} \xrightarrow[y \to 0]{\text{ćwiczenia}} \frac{R^{n-2}}{n(n-2)\omega_n}.$$

Okazuje się (ćwiczenia) $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{n\omega_n} \frac{R^2-|y|^2}{R|x-y|^n}$

Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a na $B(0,R)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0. & \text{w } B(0,R) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

ma postać $u(y) = \int_{\partial B(0,R)} \varphi \frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n |x-y|^n} \, d\sigma(x)$

Tw. funkcja $B(0,R) \ni y \longmapsto \int_{\partial B(0,R)} \varphi(x) \frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n|x-y|^n} \, d\sigma(x)$ jest harmoniczna oraz rozszerza się do $\overline{B(0,R)}$ i $u|_{\partial B(0,R)} = \varphi$.

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  $0<x<1$

War. brzegowy $u(0,t) = u(1,t) = 0$. $\forall t$.

War. początkowy $u(x,0) = 0$

$u_t(x,0) = x(1-x)$.