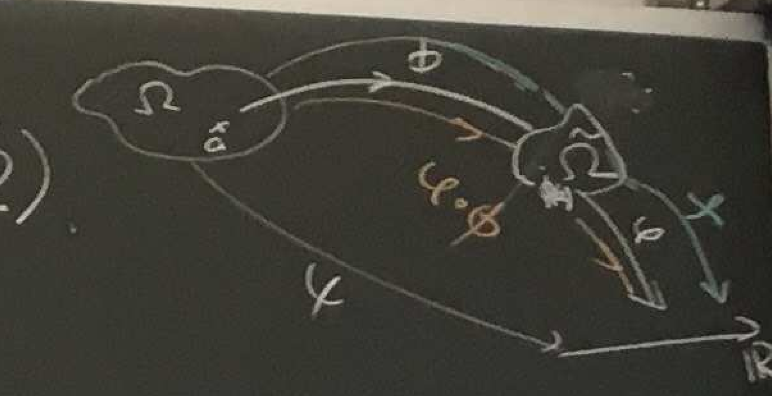
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $\phi: \Omega \to \tilde\Omega$ gładkie odwzorowanie

T - dystrybucja na Ω o zwartym nośniku oraz $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde\Omega)$



def: $(\phi_* T)(\varphi) \equiv T(\varphi\circ\phi)$; zatem $\phi_* T \in \mathcal{D}'(\tilde\Omega)$

Przykład $\phi_*(\delta_a) = \delta_{\phi(a)}$ $\phi_* T$ nazywamy obrazem prostym dystrybucji

Obraz odwrotny dystrybucji

Dla uproszczenia zał. że $\phi:\Omega\to\tilde\Omega$ jest dyf. Rozważmy T_f gdzie $f:\tilde\Omega\to\mathbb{C}$. Dla $\psi\in\mathcal{D}(\Omega)$ obliczmy $T_{f\circ\phi}(\psi) = \int f\circ\phi(x)\,\psi(x)\,d^n x$

$$= \int_\Omega f\circ\phi(x)\,\psi\circ\phi^{-1}(\phi(x))\, d^n\phi^{-1}(\phi(x)) = \int_{\tilde\Omega} f(y)\,\underbrace{\psi\circ\phi^{-1}(y)\,|\det(\phi^{-1})'|}\, d^n y = T_f(\psi\circ\phi^{-1}\cdot|\det(\phi^{-1})'|)$$

Bijekcję $\phi:\Omega_1\to\Omega_2$ nazywamy dyffeomorfizmem jeśli jest gładka oraz ϕ^{-1} jest gładka

Definicja Jeśli $T\in\mathcal{D}'(\tilde\Omega)$ oraz $\phi:\Omega\to\tilde\Omega$ jest dyffeomorfizmem to dystrybucję

$\mathcal{D}(\Omega)\ni\psi\longmapsto T(\psi\circ\phi^{-1}\cdot|\det(\phi^{-1})'|)\in\mathbb{C}$ oznaczamy $\phi^*T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ i nazywamy obrazem odwrotnym T przy pomocy ϕ.

Przykład: $b\in\tilde\Omega$, $T=\delta_b$ Niech $a\in\Omega$: $b=\phi(a)$. $\phi^*\delta_b(\psi) = \delta_b(\psi\circ\phi^{-1}\cdot|\det(\phi^{-1})'|) =$

$$= \psi(\phi^{-1}(b))\,|\det(\phi^{-1})'(b)| = \frac{\psi(a)}{|\det\phi'(a)|} = \frac{\delta_a}{|\det\phi'(a)|}(\psi)$$

Czasami piszemy $\boxed{\delta_{\phi(a)}(\phi(x)) = \frac{\delta_a(x)}{|\det\phi'(a)|}}$.

W literaturze widuje się wzory typu $\delta_0(p^2-m^2)$, $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ $\phi(\vec p) = p^2-m^2$.

Rozważmy teraz: $\Omega = \tilde\Omega\times]a,b[$ i odwzorowanie $\phi(x,t)=x$; $f:\tilde\Omega\to\mathbb{C}$

Obliczmy $T_{f\circ\phi}(\psi) = \int_{\tilde\Omega\times]a,b[} f(x)\,\psi(x,t)\,dx\,dt = (T_f\otimes 1)(\psi)$

Definicja: Dla $\phi : \hat{\Omega} \times]a,b[\to \hat{\Omega}$ j.w. oraz $T \in \mathcal{D}'(\hat{\Omega})$, $\phi^* T \in \mathcal{D}'(\hat{\Omega} \times]a,b[)$ jest zdefiniowane wzorem $\phi^* T = T \otimes 1$.

Najogólniej: niech $\Phi : \Omega \to \hat{\Omega}$ będzie odwzorowaniem gładkim t. że pochodna ϕ' ma maksymalny rząd. Wiemy, lokalnie $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ gdzie ϕ_2 jest dyffeomorfizmem oraz ϕ_1 jest rzutowaniem na współrzędne.

Dlaczego?: $\phi'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\phi'(a) = \underbrace{[\quad]}_{n}\}^{m}$ $\Rightarrow$ Istnieje odwz. $\hat{\Phi} : \Omega \to \mathbb{R}^{n-m}$ t. że

$\Omega \ni x \xmapsto{\phi_2} (\phi(x), \hat{\phi}(x)) \in \mathbb{R}^n$ jest $\to \underbrace{[\quad]}_{n}\}^{n-m}$ już dyffeomorfizmem.

$\downarrow \phi_1$

$\phi(x)$.

Dalej zakładamy (dla uproszczenia), że $\phi = \phi_1 \circ \underline{\phi_2}$ w sensie globalnym.

Obliczmy: $\phi^* T_f = T_{f \circ \phi} = T_{(f \circ \phi_1) \circ \phi_2} = \phi_2^*(T_{f \circ \phi_1}) = \phi_2^*(\phi_1^* T_f)$.

i dla dowolnej dystrybucji $T \in \mathcal{D}'(\hat{\Omega})$, $\phi^* T \equiv \phi_2^*(\phi_1^* T) = \phi_2^*(T \otimes 1)$

Przykład: $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie $\phi(x,y) = r - a$. $(\phi^* \delta_0)(x) = \delta_0(\phi(x))$

Obliczmy $(\phi^* \delta_0)(\psi) = \int \delta_0(r-a)\, \psi(x,y)\, dx\, dy = \int \delta_0(r-a)\, \psi(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \psi(a,\theta)\, a\, d\theta$

$\boxed{\delta_0(r-a) = a\, d\theta}$ $\leftarrow$ obcinamy funkcję do okręgu o $r = a$ i całkujemy

TEORIA MIARY

Definicja Niech X będzie zbiorem oraz $\mathcal{P}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X.

Mówimy, że $\mathcal{P}$ jest algebrą jeśli

(1) $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cup B \in \mathcal{P}$

(2) $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$

(3) $X \in \mathcal{P}$.

Jeśli spełniony punkt

(4) jeśli $A_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}$ to $\bigcup A_n \in \mathcal{P}$

to mówimy, że $\mathcal{P}$ jest σ-algebrą.

Notacja: $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty[\cup \{\infty\} \overset{\text{ozn}}{=} [0, \infty]$; $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = A \sqcup B$

Definicja. Mówimy, że odwzorowanie ($\mathcal{P}$-algebra)

$\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow [0, \infty]$ spełniające

$\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ jest addytywne.

Jeśli $\mathcal{P}$ jest σ-algebrą oraz

$\varphi : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ jest takie, że

$\varphi\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ to φ nazywamy

miarą na σ-algebrze $\mathcal{P}$.