Stw. $\mathcal{E}$ - zbiory elementarne, $A \subset \mathcal{E}$, $\varepsilon>0$. Istnieją $\mathcal{O}, \mathcal{D} \in \mathcal{E}$ gdzie $\mathcal{O}$ - otwarty, $\mathcal{D}$ - domknięty, $\mathcal{D} \subset F \subset \mathcal{O}$ oraz $m(\mathcal{O})-\varepsilon \leq m(F) \leq m(\mathcal{D})+\varepsilon$.

Szkic dowodu $F = \bigsqcup_{i=1}^{n} (D_i)$ gdzie D_i są n-wym odcinkami. Niech $\mathcal{D}_i$ będzie odcinkiem domkniętym t. że $m(D_i) \leq m(\mathcal{D}_i) + \frac{\varepsilon}{n}$

i $\mathcal{O}_i$ — " — " — otwartym t. że $m(\mathcal{O}_i) - \frac{\varepsilon}{n} \leq m(D_i)$

Kładziemy $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i$ oraz $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$.

Stwierdzenie Jeśli $A, A_n \in \mathcal{E}$ $n \in \mathbb{N}$ & $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to $m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon>0$. Niech $\mathcal{D} \overset{\text{domk.}}{\subset} A$ t. że $m(A) \leq m(\mathcal{D})+\varepsilon$, i niech $\mathcal{O}_n \overset{\text{otw}}{\supset} A_n$ t. że $m(A_n) \geq m(\mathcal{O}_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Skoro $\mathcal{D} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ i $\mathcal{D}$ - zwarty to $\exists N$:

$\mathcal{D} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \mathcal{O}_n$. Zatem $m(A)-\varepsilon \leq m(\mathcal{D}) \leq \sum_{n=1}^{N} m(\mathcal{O}_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \left(m(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \xrightarrow{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)\right) + \varepsilon$.

a więc $m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ ∎

Wniosek: $A, A_n \in \mathcal{E}$ & $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

Dowód: $m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. W drugą stronę: $\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n \subset A \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} m(A_n) \leq m(A) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq m(A)$

Definicja $E \subset \mathbb{R}^n$: miara zewnętrzna $\mu^*(E) = \inf_{(A_n)} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ gdzie $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{E}$ & A_n - otwarte.

Stwierdzenie Jeśli $A \in \mathcal{E}$ to $\mu^*(A) = m(A)$.

Pneuimo mierzalność!! : Niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą takie, że $\mu^*(A)+\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

$A_n \in \mathcal{E}$ & otwarte. Niech ponadto $D \subset A$ ($\subset \bigcup A_n$), domk. t. że $m(A) \leq m(D)+\varepsilon$.

Wówczas $D \subset \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ a więc $m(A)-\varepsilon \leq m(D) \leq \sum_{n=1}^{N} m(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq \mu^*(A)+\varepsilon$

i $m(A) \leq \mu^*(A)+2\varepsilon$. $\forall_{\varepsilon>0} \Rightarrow m(A)=\mu^*(A)$ ∎

Stwierdzenie: $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Dowód. $\forall_n$ niech $(A_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ będzie t. że $\mu^*(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n} \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{n,i})$, $E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$

Zauważmy, że $\bigcup_{n,i} A_{n,i} \supset E$ oraz $\mu^*(E) \leq \sum_{n,i} m(A_{n,i}) \leq \sum_n \left(\mu^*(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)\right)+\varepsilon$

∎

σ-subaddytywność μ^*: $\mu^*(E) \leq \sum_n \mu^*(E_n)$

Przypomnienie $A \triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

Definicja Odległością zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^k$ nazywamy liczbę $\mu^*(A\triangle B)$ i oznaczamy $\rho(A,B)$

Stwierdzenie (dowód na ćwiczeniach)

1. $\rho(A,\emptyset)=\mu^*(A)$
2. $\rho(A,A)=0$
3. $\rho(A,B) \leq \rho(A,C)+\rho(C,B)$.
4. $\rho(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2) \leq \rho(A_1,B_1)+\rho(A_2,B_2) \geq \rho(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2)$

   $\rho(A_1\setminus A_2, B_1\setminus B_2)$

Definicja Mówimy, że zbiór A jest mierzalny i ograniczony jeśli istnieje ciąg $A_n \in \mathcal{E}$ t. że $\lim_{n\to\infty} \rho(A, A_n) = 0$. Klasę takich zbiorów oznaczamy symbolem $\mathfrak{M}_b$. Mówimy, że A jest mierzalny jeśli istnieje $A_n \in \mathfrak{M}_b$ t. że $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Jeśli $A \in \mathfrak{M}$ to jego miarę zewnętrzną oznaczamy $\mu(A)$.

Twierdzenie $\mathfrak{M}$ jest σ-algebrą oraz $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ jest miarą.

Definicja: $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ nazywamy miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^k$.

<u>Dowód</u>: Przypuśćmy, że $A, B \in \mathfrak{M}_b$. Istnieją ciągi $A_n, B_n \in \mathcal{E}$ t. że $\rho(A_n, A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \xleftarrow[n\to\infty]{} \rho(B_n, B)$

Z punktu (4) mamy $\rho(A_n \cup B_n, A \cup B) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}_b$. Podobnie $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathfrak{M}_b$.

• $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$: $\mu(A) = \rho(A, \emptyset) \le \rho(A, A_n) + \rho(A_n, \emptyset) = \rho(A_n, A) + \mu(A_n)$ podobnie $\mu(A_n) \le \rho(A_n, A) + \mu(A)$

a stąd $|\mu(A_n) - \mu(A)| \le \rho(A, A_n) \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Stąd: $\mu(A) + \mu(B) = \lim_{n\to\infty}\big(\mu(A_n) + \mu(B_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(m(A_n) + m(B_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(m(A_n \cup B_n) + m(A_n \cap B_n)\big)$

$= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

<u>Lemat</u> $A \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_b \Leftrightarrow A \in \mathfrak{M}_b$ & $\mu(A) < \infty$. Ponadto μ jest σ-addytywna na $\mathfrak{M}_b$

<u>Dowód</u> ($\Rightarrow$) $A \in \mathfrak{M}_b \Rightarrow \mu(A) = \rho(A, \emptyset) \le \rho(A, A_n) + \rho(A_n, \emptyset) = \rho(A, A_n) + \mu(A_n) \le \varepsilon + \mu(A_n) < \infty$

($\Leftarrow$) Niech $A \in \mathfrak{M}$: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ gdzie $B_n \in \mathfrak{M}_b$.

Rozważmy $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$. $E_k \cap E_l = \emptyset$ $k \ne l$ oraz $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

$\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n \subset A \Rightarrow \mu(A) \ge \mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \le \mu(A)$. Ponadto $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ ← subaddyt.

a stąd $|\mu(A_n) - \mu(A)| \leq \varrho(A, A_n) \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Stąd: $\mu(A) + \mu(B) = \lim_{n\to\infty}(\mu(A_n) + \mu(B_n)) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n) + m(B_n)) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n \cup B_n) + m(A_n \cap B_n))$

$= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

<u>Lemat</u> $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_b \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}_b$ & $\mu(A) < \infty$.

<u>Dowód</u> $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{M}_b \Rightarrow \mu(A) = \varrho(A, \emptyset) \leq \varrho(A, A_n) + \varrho(A_n, \emptyset) = \varrho(A, A_n) + \mu(A_n) \leq \varepsilon + \mu(A_n) < \infty$. Ponadto μ jest σ-addytywne na $\mathcal{M}_b$

$\Leftarrow$ Niech $A \in \mathcal{M}$: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ gdzie $B_n \in \mathcal{M}_b$.

Rozważmy $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$. $E_k \cap E_l = \emptyset$ $k \neq l$ oraz $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

$\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n \subset A \Rightarrow \mu(A) \geq \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(A)$. Ponadto $\mu(A) \stackrel{\text{subaddyt.}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

a zatem μ jest σ-addytywne na $\mathcal{M}_b$.

Ponadto: $\varrho\left(A, \bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \varrho\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

$A \in \mathcal{M}_b$. $\blacksquare$