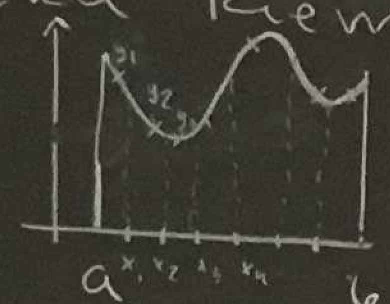
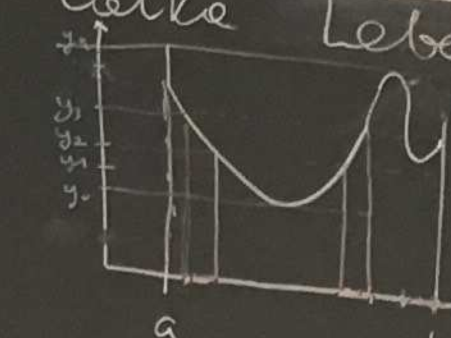
Całka Riemanna



$S_R(\pi, f) \approx \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \xrightarrow[\pi \to 0]{} \int_a^b f\,dx$

Całka Lebesgue'a



$f^{-1}([y_2, y_3[)$

$S_L = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \mu(f^{-1}([y_i, y_{i+1}[)$

Przypomnienie: miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$.

Odcinki $\subset \mathcal{E} \subset \mathcal{M}_b \subset \mathcal{M}$

$E \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \mu^*(E) = \inf\limits_{\substack{(A_i)_{i\in\mathbb{N}}:\, A_i \subset \mathcal{E} \\ E \subset \bigcup A_i \text{ otwarte}}} \sum m(A_i)$

$\rho(E_1, E_2) = \mu^*(E_1 \setminus E_2 \cup E_2 \setminus E_1)$

$E \in \mathcal{M}_b : \exists E_n \in \mathcal{E}$ t. że $\rho(E, E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists X_n \in \mathcal{M}_b : X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Tw. X jest σ-algebrą i $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, gdzie $\mu(X) \overset{def}{=} \mu^*(X)$ jest miarą. μ nazywamy miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$

- $A \in \mathcal{M}$ oraz $\mu(A) < \infty \Rightarrow A \in \mathcal{M}_b$; ponadto $\forall B \in \mathcal{M}$ t. że $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$ $\quad B_n \in \mathcal{M}_b$ mamy $\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. (*)

Łatwo widać, że $\mathcal{M}$ jest zamknięte na przeliczalne sumy zbiorów.

Do wykonania pozostało: i) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$. $A \cap B = \bigcup_{i=1} A_i \cap \bigcup_j B_j = \{A_i, B_j \in \mathcal{M}_b\}$

$= \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} A_i \cap B_j$ oraz $A_i \cap B_j \in \mathcal{M}_b$.

ii) $A \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B)$ zauważmy, że $\mu^*(A_n \setminus B) < \infty$ a więc $A_n \setminus B \in \mathcal{M}_b$.

iii) μ jest σ-addytywna na $\mathcal{M}$: $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n \in \mathcal{M}$, $\begin{cases} \forall_n \mu(B_n) < \infty \Rightarrow B_n \in \mathcal{M}_b, \ (*) \ ✓ \\ \text{albo} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \mu(B_{n_0}) = \infty \Rightarrow \underset{\infty}{\mu(B)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \infty \end{cases}$ $\square$

Teoria całki Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$

Definicja Mówimy, że $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna jeśli zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ jest mierzalny dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$.

<u>Stw</u> NWSR: (1) f - mierzalna (2) $\forall_{a \in \mathbb{R}}$ zbiór $\{x : f(x) < a\}$ jest mierzalny, (3) $\{x : f(x) \geq a\}$ jest mierzalny (5) $\forall_{O \underset{otw}{\subseteq} \mathbb{R}}$ $f^{-1}(O)$ jest mierzalny (4) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \{x : f(x) \leq a\}$ - mierz.

<u>Dowód</u>: f - mierzalna; $\{x : f(x) \leq a\} = \{x : f(x) > a\}^c$ - mierzalne;

$\{x : f(x) < a\} = \bigcup_n \{x : f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}$ - mierzalne; $\{x : f(x) \geq a\} = \{x : f(x) < a\}^c$ - mierzalne.

$\{x : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq a + \frac{1}{n}\}$. $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$.

$1 \Leftrightarrow 5$. $5 \Rightarrow 1$: $f^{-1}(\underbrace{]a, \infty[}_{\text{otw.}}) = \{x : f(x) > a\}$ - mierzalny; $1 \Rightarrow 5$. $f^{-1}(]a, b[) = \{x : f(x) > a\} \cap \{x : f(x) < b\}$ mierzalne

Uwaga: Każdy zbiór otwarty $O \subset \mathbb{R}$ jest przeliczalną sumą odcinków.

Dla $x \in O \cap \mathbb{Q}$ niech $\varepsilon_x > 0$: $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset O$. $O = \bigcup_{x \in O \cap \mathbb{Q}} (]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[)$

Zatem $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\right) = \bigcup_{x \in O \cap \mathbb{Q}} f^{-1}(]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[)$ - mierzalne.

☒

Uwaga: Każdy zbiór otwarty $O \subset \mathbb{R}^n$ jest przeliczalną sumą odcinków (n-wymiarowych)

w szczególności O jest mierzalny.

Wniosek funkcja ciągła $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna.

Wniosek 2 $f_1,\dots,f_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ - mierzalne oraz $F:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ - ciągła to
to $\mathbb{R}^n \ni x \xmapsto{G} F(f_1(x),\dots,f_k(x))\in\mathbb{R}$ jest mierzalna.

<u>Dowód</u> $G^{-1}(]a,\infty[)$ - czy mierzalna? Zauważmy, że $F^{-1}(]a,\infty[)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$. Istnieją odcinki $D_j =]a_{1,j},b_{1,j}[\times\dots\times]a_{k,j},b_{k,j}[$ t. że $F^{-1}(]a,\infty[)=\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j$. Zatem $G^{-1}(]a,\infty[)=\bigcup_j \Big(f_1^{-1}(]a_{1,j},b_{1,j}[)\cap f_2^{-1}(]a_{2,j},b_{2,j}[)\cap\dots\cap f_k^{-1}(]a_{k,j},b_{k,j}[)\Big)$ a zatem jest mierzalna

Wnioski $f_1,f_2:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ są mierzalne to $f_1+f_2,\ f_1\cdot f_2$ też. Jeśli $f_1\neq 0$ to $\frac{1}{f_1}$ - mierz.

$\boxed{F(x,y)=x+y\ \&\ F(f_1,f_2)=f_1+f_2 - \text{mierzalna}}$

Definicja: Mówimy, że funkcja (mierzalna) $s:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ jest prosta jeśli ma skończony zbiór wartości.

Niech $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ - wartości s. Zauważmy, że $A_i := s^{-1}(\{\alpha_i\})$ jest mierzalny.
oraz $s=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot\chi_{A_i}$.

Definicja Jeśli $s:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ jest prosta (to $\alpha_i\geq 0$) i całkę z $s:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ po $\mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,\mu(A_i)$ i oznaczamy $\int_{\mathbb{R}^n} s\,d\mu$

Jeśli $A\subset\mathbb{R}^n$ jest mierzalny to $s\cdot\chi_A$ jest funkcją prostą i $\int_A s\,d\mu := \int_{\mathbb{R}^n} s\chi_A\,d\mu$.

χ_A jest funkcją prostą, $\int_A s\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \dots$

Definicja Niech $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ będzie mierzalna. Liczbę

$\sup\limits_{0\le s\le f} \int_A s\,d\mu \in [0,\infty]$ nazywamy całką Lebesgue'a z f po zbiorze A

i oznaczamy $\int_A f\,d\mu$.

Uwaga: ustalmy $N\in\mathbb{N}_+$, $s_N = \sum_{k=0}^{N\cdot 2^N} \frac{k}{2^N}\chi_{A_k}$, gdzie $A_k = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right[\right)$, $k<N2^N$

oraz $A_{N2^N} = f^{-1}([N2^N,\infty[)$. Zauważmy, że $s_{N-1}\le s_N\le f$, $s_N(x)\to f(x)$.

Wykażemy, że $\int_A s_N\,d\mu \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_A f\,d\mu$