Seria zadań, Analiza II

Zadanie 1. Obliczyć pochodne kierunkowe $\nabla_h F(x)$ odwzorowań:

a) $F : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \frac{x}{1+y^2} \in \mathbb{R}^1, \quad h = (1,2), \quad x = (2,1);$

b) $F : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, e^{x-y} \in \mathbb{R}^2, \quad h = (-1,2), \quad x = (1,-1).$

Zadanie 2. Niech $\phi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \frac{1}{y}(\phi(ax+y) - \psi(ax-y))$$

spełnia równanie różniczkowe

$$\partial_x^2 f = \frac{a^2}{y^2}\partial_y(y^2\partial_y f).$$

Zadanie 3. Niech $\phi \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Dowieść, że funkcja określona wzorem $f(x,y) = \phi(x^2 - y^2)$ spełnia równanie

$$y\partial_x f + x\partial_y f = 0.$$

Wykazać, że każda funkcja różniczkowalna spełniająca to równanie jest tej postaci.

Zadanie 4. Wyrazić we współrzędnych sferycznych (r, θ, ϕ), gdzie

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

operatory $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ oraz operator Laplace'a $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Uwaga: odpowiedź można zgooglować.

Zadanie 5. Dokonując zamiany zmiennych

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{x}{y} \end{bmatrix}$$

przekształcić równanie $x^2\partial_x^2 f - y^2\partial_y^2 f = 0$.

Zadanie 6. Równanie $(xy+z)\partial_x z + (1-y^2)\partial_y z = x + yz$ zapisać w zmiennych

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yz - x \\ xz - y \\ xy - z \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Równanie $\partial_x^2 z - 2\partial_{xy}^2 z + \partial_y^2 z = 0$ zapisać w zmiennych

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ \frac{y}{x} \\ \frac{z}{x} \end{bmatrix}.$$