Dynamiczna seria zadań, Analiza IV

Zadanie 1. Znaleźć funckcję harmoniczną wewnątrz okręgu jednostkowego taką, że $u|_{r=1} = f(\phi)$, gdzie

$$a)\ f(\phi) = \cos^4(\phi) \qquad b)\ f(\phi) = \sin^6(\phi) + \cos^6(\phi).$$

Zadanie 2. Znaleźć rozwiązanie równania Poissona

$$\Delta u = -x^2 y^2$$

jeśli na brzegu $u|_{r=1} = \cos(2\phi)$.

Zadanie 3. Znaleźć stacjonarny rozkłąd temperatury $u(r, \phi)$ wewnątrz nieskończonego walca kołowego o promieniu R jeśli na brzegu rozkład temperatury dany jest wzorem

$$u(R, \phi) = \begin{cases} \phi \text{ dla } 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \\ 2\pi - \phi \text{ dla } \pi \leqslant \phi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Zadanie 4. Niech dla $n = 1, 2, 3 \ldots$,

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x)).$$

Wykazać, że T_n jest wielomianem stopnia n, który ma dokładnie n pierwisatków na przedziałe $]-1, 1[$ oraz

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Uwaga: T_n nazywamy n-tym wielomianem Czybyszewa.

Zadanie 5. Niech dla $n = 1, 2, 3 \ldots$,

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^n.$$

Wykazać, że P_n jest wielomianem stopnia n który na odcinku $]-1, 1[$ ma dokładnie n pierwiastków rzeczewistych oraz

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n'(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0.$$

Równanie różniczkowe dowodzi się różniczkując $(n + 1)$ razy tożsamość

$$(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n = 2nx(x^2 - 1)^n.$$

Uwaga: P_n nazywamy n-tym wielomianem Legendre'a.

Zadanie 6. Rozwiązać, równanie różniczkowe $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ szukając rozwiązania w postaci szeregu trygonoemtrycznego. Następnie rozwiązac to równanie zgadując rozwiązania y_1 w postaci wielomianu oraz szukając drugiego rozwiązania metodą Liouvilla.

Zadanie 7. Rozpatrzmy równanie

$$(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$$

szukając rozwiązania w postaci szeregu potęgowego. Wykazać, że promień zbieżności odpowiednich szeregów jest równy ∞. Wykazać, że rozwiązanie takie, że $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ jest równe $y(x) = \cos(a \arccos(x))$. Podobnie, rozwiązanie takie, że $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ jest równe $y(x) = \sin(a \arccos(x))$.

Zadanie 8. Sprowadzić, do postaci kanonicznej równania:

- $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$; odp: $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0$; $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{x}{2} + y$, $\zeta = -\frac{x}{2} - y + z$;
- $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$; odp: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0$, $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = -x - y + z$, $\tau = 2x - 2y + z + t$;

Zadanie 9. Wykazać, że wielomiany Czybyszewa T_n (patrz zadanie 1) stanowią układ ortonormalny w przestrzeni $L^2([-1,1];(1-x^2)^{\frac{1}{2}})$ gdzie iloczyn skalarny zdefiniowany jest wzorem

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} \bar{f}(x)g(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Znaleźć $||T_n||^2$. Wykazać, że z dokładnością do normalizacji wielomiany T_n są wynikiem ortogonalizacji Gramma - Schmidta układu $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$.

Zadanie 10. Obliczyć

$$\min_{a,b,c} \int_0^\infty |x^3 - a - bx - cx^2|^2 e^{-x} dx.$$

Znaleźć

$$\max \int_0^\infty x^3 g(x) e^{-x} dx$$

gdzie $\int_0^\infty |g(x)|^2 e^{-x} dx = 1$, $\int_0^\infty x^k g(x) e^{-x} dx = 0$ dla $k = 0, 1, 2$.

Zadanie 11. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Wykazać, że

- $P(A) \leqslant P(B)$ jeśli $A \subseteq B$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$
- $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leqslant \sum_i P(A_i)$

Uwaga: Rozwiązanie można znaleźć w książce P. Billingsey "Miara i prawdopodobieństwo" w rozdziale II.

Zadanie 12. Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest bezatomowa, jeśli z $P(A) > 0$ wynika, iż istnieje B t.że $0 < P(B) < P(A)$. Dowieść ,że dla miary bezatomowej P warunki $P(A) > 0$ i $\epsilon > 0$ implikują istnienie B t.że $P(B) < \epsilon$.

Zadanie 13. Wykazać, korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej że, dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mamy $\lim_{y \to 0} \int_0^\infty \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$.

Zadanie 14. Zbadać ciągłość funkcji określonej wzorem $F(a) = \int_a^{1+a} \frac{1}{1+x^2+a^2} dx$, $a \geqslant 0$.

Zadanie 15. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n \sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}} dx = 0$ (skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).

Zadanie 16. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną (μ jest miarą na σ-algebrze $\mathcal{F}$ oraz $\mu(\Omega) = 1$). Niech f_n będzie ciągiem ograniczonych funkcji mierzalych na Ω, zbieżnym jednostajnie do f. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu(x) = \int_\Omega f(x) d\mu(x)$.

Zadanie 17. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Wykazać, że:

a) $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$ dla wszystkich funkcji mierzalnych dodatnich.
b) $\int_\Omega f d\mu \int_\Omega g d\mu \geqslant 1$ gdzie f i g są dodatnimi funkcjami mierzalnymi takimi, że $fg \geqslant 1$.

W dowodzie punktu b) korzystamy z nierówności Schwarza pierwiastkując i całkując nierówność $fg \geqslant 1$.

Zadanie 18. Obliczyć $\int_0^\infty x^n e^{-x}$ różniczkując całkę z parametrem $\int_0^\infty e^{-tx}dx$ ze względu na parametr t. Uzasadnić, korzystając z Twierdzenia Lebesguea o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Zadanie 19. Wykazać, że $\int_0^\infty \cos(tx)e^{-x^2/2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-t^2/2}$ różniczkując całkę ze względu na parametr t. Uzasadnić, korzystając z Twierdzenia Lebesguea o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Zadanie 20. Metodą różniczkowania po parametrze obliczyć całki.

- $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$
- $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} ax dx}{x(1+x^2b^2)}$
- $\int_0^1 x^{a-1}\log^n(x)dx$, $a > 1$.
- $\int_0^\infty \frac{\log(a^2+x^2)}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi\log(|a|+|b|)}{|b|}$
- $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos(2bx)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/a}$, $a > 0$ - wskazówka: zaminiając zmienne sprowadzić do całki z jednym parametrem a następnie ułożyć i rozwiązać równanie różniczkowe spełniane przez tę funkcję.

Uzasadnić, korzystając z Twierdzenia Lebesguea o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Zadanie 21. Metodą Frobieniusa, znaleźć rozwiązania ogólne równania różniczkowego:

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0.$$

Zadanie 22. Metodą Frobieniusa, znaleźć rozwiązania ogólne równania różniczkowego:

$$x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0.$$

Zadanie 23. Obliczyć transformaty Fouriera następujących funkcji:

- $f(x) = e^{-|x|}$
- $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$
- $f(x) = \theta(x)e^{-ax}\sin(b)x$ gdzie θ jest funkcją charkterystyczną odcinka $[0,\infty[$ oraz $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \chi_{[-A,A]}$ - funkcja charakterystyczna zbioru $[-A, A]$.
- $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
- $f(x) = \frac{1}{\cosh(a)+\cosh(x)}$ gdzie $a > 0$.

Zadanie 24. Obliczyć transformaty Fouriera następujących dystrybucji temperowanych:

- $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+2}$
- $f(x) = \sin(ax)$
- $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$
- $f(x) = \frac{x\sin(x)}{1+x^2}$.

Zadanie 25. Znaleźć wszystkie rozwiązania 2 - wymiarowego równania falowego

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$$

postaci $u(x,y) = R(\rho)\Phi(\phi)$ takie, że $R(1) = 0$ (ρ, ϕ są współrzędnymi biegunowymi na płaszczyźnie). Rozwiązanie i interpretację fizyczną można znaleźć na stronie
`http://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane`

Zadanie 26. Zdefiniujmy wielomiany $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-2}(1+x)^{-2}\partial_x^n (1-x)^{n+2}(1+x)^{n+2}$. Wykazać, że

$$((1-x^2)\partial_x^2 - 6x\partial_x + n(n+5))P_n(x) = 0$$

oraz, że rodzina $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ortogonalna w $L^2([-1,1],(1-x)^2(1+x)^2)$. Rozwiązanie można znaleźć pod adresem `http://www.fuw.edu.pl/~derezins/mmf-iii.pdf` w rozdziale dotyczącym wielomianów Jacobiego.

Zadanie 27. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = e^x$$