Ćwiczenia

Twierdzenie 1

$f : [a,b] \times]c,d[\to \mathbb{R}$ - ciągła to funkcja

$]c,d[\ni \alpha \mapsto \int_a^b f(x,\alpha)\,dx \in \mathbb{R}$ jest ciągła

Twierdzenie 2

$f : [a,b] \times]c,d[\to \mathbb{R}$ - ciągła

$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)$ - ciągłe to

$]c,d[\ni \alpha \mapsto \int_a^b f(x,\alpha)\,dx \in \mathbb{R}$ jest różniczkowalne oraz

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)\,dx.$$

Wzór $\frac{d}{d\alpha} \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)\,dx + f(\psi(\alpha),\alpha)\,\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha),\alpha)\,\varphi'(\alpha).$

~~Twierdzenie~~

Twierdzenie (Do wykazania na ćwiczeniach)

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ - ciągłe to

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y).$$

Dowód. Niech $c \leq \eta \leq d$.

$$F_1(\eta) = \int_c^\eta dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$\frac{d}{d\eta} F_1 = \int_a^b f(x,\eta)\,dx.$$

$F_2(\eta) = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x,y)\,dy$ - całka z parametrem. spełnione są zał Tw 2. zatem $\frac{d}{d\eta} F_2(\eta) = \int_a^b f(x,\eta)\,dx$. Skoro $F_1(c) - F_2(c) = 0$

to $F_1 = F_2$. (bo $F_1' = F_2'$).

Zadanie Fichtenholz tom 2 strona 571. Zmieniając kolejność całkowania w całce

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$ wykazać że

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$$ gdy $0 < a < b$.

Zadanie Fichtenholz tom 2 strona 577.

Wykazać, że dla $a > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2\theta) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2}$$

Zadanie Fichtenholz tom 2 strona 578.

Obliczyć całkę $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$; ogólniej

obliczyć całkę $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ gdzie $\alpha \geq 0$

Zadanie Fichtenholz t. 2. strona 579

Udowodnić, że funkcje

(a) $u(x) = x^n \int_0^\pi \cos(x \cos\theta) \sin^{2n}\theta \, d\theta$ i

(b) $u(x) = \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin\theta \, d\theta)$ gdzie $n \in \mathbb{N}$

spełniają równanie różn.

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - n^2) u = 0.$$