Ciągłość i różniczkowalność niewłaściwej całki względem parametru.

$f: [0,\infty[\times ... \to \mathbb{R}$

$\int_0^\infty f(x,\alpha)\,dx = F(\alpha)$.

Mówimy, że F jest zbieżna jednostajnie jeśli $\forall \varepsilon > 0$ istnieje M takie, że jeśli $M_2 > M_1 > M$ to

$\left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon$.

Wykład kryterium Weierstrassa, kryterium Abela zbieżności jednostajnej.

<u>Tw 1</u> $f: [0,\infty[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ - ciągła a całka $\int_0^\infty f(x,\alpha)\,dx$ jest zbieżna jednostajnie to $F(\alpha) = \int_0^\infty f(x,\alpha)\,dx$ jest funkcją ciągłą.

<u>Tw 2</u> f jak wyżej i taka że $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ jest ciągła oraz $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ zbieżna jednostajnie. Wówczas

$\frac{dF}{d\alpha} = \int \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$.

Zadanie Wykazać że przy założeniach Tw 1

$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)\,dy$

<u>Dowód</u> Wiemy, że $\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)\,dy$

$F_A = \int_a^A f(x,y)\,dx \rightrightarrows \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ zatem przechodząc z $A \to \infty$ i wchodząc z lim pod $\int \Rightarrow \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx$.

Zadanie Fichtenholz t 2 s. 620

Uwaga: przyjmujemy, że wzór $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ jest znany.

Wykazać, że

(a) $\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(b) $\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{a^n}\,\frac{\pi}{\sqrt{a}}$

(c) $\int_0^1 x^{a-1}\ln^n(x)\,dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}$

Zadanie F'lz t2 s 621

Obliczyć całki

$\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-kx}$, $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,\frac{\sin\beta x}{x}\, e^{-kx}\,dx$

Zadanie F'lz t2 s621

Obliczyć całkę $\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt$

Obliczyć całki (F'lz t2 s 622-623

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} rx}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\,dx$$

Obliczyć $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \qquad a,b>0$

Zauważając że

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-yx}\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx.$$

Obliczyć $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx \qquad a,b>0$

Całkując $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad y>0$

od a do b.