1 Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

2. Niech $z(x,y) = f(x^2-y^2)$. Udowodnić

że spełniona jest równość

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

3. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$

4. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$

5. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją charakterystyczną

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \wedge (x,y) \neq (0,0)\}$$

Wykazać, że pochodne kierunkowe

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = 0.$$

W szczególności pochodne kierunkowe jest liniowe a funkcja f jest nieciągła.

6 Znaleźć pochodną funkcji

$\mathbb{R}^k \ni x \longmapsto x^T A x \in \mathbb{R}$ gdzie $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

jakiej postaci przybiera ta pochodna gdy $A^T = A$?

7. Sprawdzić, że funkcje $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ spełnia równanie Laplace'a

$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ gdzie

a) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f(x,y)=\operatorname{sh}(x)\cosh(y)$

8) Niech $D_+=\{(x,y): y>0\}\subset\mathbb{R}^2$

oraz $u\in C^1(D_+)$. Sprawdzić, że

$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}u + u = 0 \iff u$ jest postaci

$u(x,y)=y\,\varphi(xy^2)$ gdzie $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$.

($\Leftarrow$) oczywiste

($\Rightarrow$) Sprawdzić, że $\forall c\in\mathbb{R}$ funkcja

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\,u(ct^{-2},t)\right)=0$ Kładziemy

$\varphi(c):=u(c,1)=\frac{1}{t}\,u(ct^{-2},t) \Rightarrow u(x,y)=y\varphi(xy^2)$