Zadanie 1

Zapisać operator $L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ we współrzędnych biegunowych

Zadanie 2 W obszarze $\Omega = \{(x,y) : x, y > 0\}$ określamy nowe współrzędne $u = \sqrt{xy}$ $v = \frac{y}{x}$. Wyrazić w tych współrzędnych operator $L(f) = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Odp $L(f) = -2u^2 v \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{u} f\right)$. Jak wyglądają rozwiązania równania $Lf = 0$?

Zadania na ekstrema <u>bez 2ej pochodnej</u>

Zadanie 3 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $u(x,y) = \sin(x) + \sin(y) - \sin(x+y)$ na trójkącie ograniczonym osią x, y i prostą $x+y = 2\pi$.

Zadanie 4 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = (x+y)e^{-\left(\frac{x}{2} + 2y\right)}$ na $K = \{(x,y) : x, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$

Zadanie 5. Dla danych $a, b, c > 0$ znaleźć x, y, z: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dla których prostopadłościan o wierzchołkach $(\pm x, \pm y, \pm z)$ ma największą objętość.
Wsk. rozważyć funkcję $x^2 y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ na odpowiednim zbiorze.

Zadanie 6*) Wśród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć taki, dla którego bryła obrotowa powstała przez obrót dookoła jednego z boków ma największą objętość.

Zadanie 0. $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ nazywamy jednorodną st. α jeśli $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$ dla $t > 0$. Wykazać, że f jest jed. st. α $\iff$ $\alpha f = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f$