Zadania z Geometrii Różniczkowej

Seria 1. **Listopad 2010**

1. Sprawdzić, że odwzorowanie $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\Phi(s,t) := (s + t\sin s, \log|\cos s| + t\cos s)$, jest odwracalne na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$. Wykazać, że współrzędne S, T odwzorowania odwrotnego $\Phi^{-1}(x,y) = (S(x,y), T(x,y))$ spełniają równania: $|\nabla T|^2 := (T'_x)^2 + (T'_y)^2 = 1$, $\langle \nabla S | \nabla T\rangle := S'_x T'_x + S'_y T'_y = 0$,$|\nabla S| = (T + \frac{1}{\cos S})^{-1}$.

1. Oznaczając $\delta := t + \frac{1}{\cos s}$ mamy: $\Phi'(s,t) = \begin{bmatrix} \delta\cos s & \sin s \\ -\delta\sin s & \cos s \end{bmatrix}$, więc $\det \Phi'(s,t) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \delta$, co w $(s,t) = (0,0)$ jest równe 1, skąd odwracalność; z kolei $(\Phi^{-1})'(x,y) = (\Phi'(s,t))^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \delta\sin s & \delta\cos s \end{bmatrix}$, skąd teza.

2. Jaką powierzchnię w $\mathbf{R}^3$ opisuje parametryzacja $x = \frac{u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$, $y = \frac{2uv}{1+u^2+v^2}$, $z = \frac{1}{1+u^2+v^2}$? Sprawdzić jej regularność.

2. *Odpowiedź.* Część stożka $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, opisana nierównościami $0 < z < 1$. Istotnie, $|x+iy| = \frac{|(u+iv)^2|}{1+u^2+v^2} = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} = 1 - z$.

3. Dowieść, że dla $p > 3$ zbiór $C_p := \{(x,y,z) \in {\mathbf{R}_+}^3 : xy + yz + zx = p, xyz = 1\}$ jest gładką, zwartą i spójną krzywą w $\mathbf{R}^3$. Dla $p = 5$ wyznaczyć ekstremalne wartości x, y i z na C_p.

3. Skoro $\nabla f_1 \times \nabla f_2 = [x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)]$, to dla $\mathbf{x} = (x,y,z) \in {\mathbf{R}_+}^3$ rząd $f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{bmatrix}$ jest mniejszy od 2 $\iff$ $x = y = z$, a ten warunek dla $\mathbf{x} \in C_p$ nie jest spełniony; to dowodzi, że C_p jest gładką 1-wymiarową rozmaitością.

4. Określmy $\phi : \mathrm{U}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\mathrm{U} := \{u \in \mathbf{C} : |u| = 1\}$, wzorem $\phi(u,t) := (tu, \mathrm{Im}(u^2)) \in \mathbf{C}\times\mathbf{R} = \mathbf{R}^3$. Sprawdzić, że: 1^0 $S := \phi(\mathrm{U}\times\mathbf{R}) = \{(x,y,z) : (x^2+y^2 > 0,\ z = \frac{2xy}{x^2+y^2})$ lub $(x = y = 0,\ |z| \leqslant 1)\}$; 2^0 ϕ jest lokalnym dyfeomorfizmem na $\mathrm{U}\times\mathbf{R}$ pomniejszonym o 4 punkty nieregularne $(\frac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}, 0)$, których obrazami są 2 punkty $(0,0,\pm1) \in S$; 3^0 $\phi(-u,-t) = \phi(u,t)$, więc ϕ określa odwzorowanie ϕ_0 *wstęgi Möbiusa* $M := (\mathrm{U}\times\mathbf{R})/_\pm$ w S (symetrycznie położone punkty "równika" wstęgi są sklejane przez odwzorowanie ϕ_0).

4. 2^0 Niech $\tilde\phi : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\tilde\phi(s,t) := \phi(e^{is},t) = (t\cos s, t\sin s, \sin 2s)$ (złożenie ϕ z lokalnym dyfeomorfizmem $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathrm{U}\times\mathbf{R}$, $(s,t) \mapsto (e^{is},t)$); macierz $\tilde\phi'(s,t)$ ma następujące minory stopnia 2.: t, $2\cos s\cos 2s$, $2\sin s\cos 2s$; są one $= 0$ (tzn. $\tilde\phi'$ ma < 2 rząd) $\iff$ $(t = 0, \cos 2s = 0)$ $\iff$ $(t = 0,\ e^{is} = \frac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}})$.

5. Utożsamijmy $\mathbf{R}^4$ z $\mathbf{C}^2$, zapisując punkt $(u_1,u_2,v_1,v_2) \in \mathbf{R}^4$ w postaci (u,v), gdzie $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$. Oznaczmy $S := \{(u,v) : v \neq 0,\ u = \frac{v^2}{|v|^2}\}$. Dowieść, że: 1^0 S jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^4$, homeomorficzną z powierzchnią walca; 2^0 $\overline{S}$ (domknięcie S w $\mathbf{R}^4$) jest gładką powierzchnią, homeomorficzną ze wstęgą Möbiusa.

5. Ad 1^0. S jest wykresem gładkiego odworowania $\mathbf{C}^* \ni v \mapsto \frac{v^2}{|v|^2} \in \mathbf{C}$, więc jest gładka. Odwzorowanie $\phi : \mathrm{U}\times\mathbf{R} \to S$, $\mathrm{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, dane wzorem $\phi(z,t) := (z^2, e^t z)$, jest oczywiście ciągłą bijekcją (parametryzacja S); odwzorowanie odwrotne $\phi^{-1}(u,v) = (\frac{v}{|v|}, \log|v|)$ także jest ciągłe, więc ϕ jest homeomorfizmem walca $\mathrm{U}\times\mathbf{R}$ na S. Ad 2^0 $\overline{S} = S \cup \{(u,v) : |u| = 1, v = 0\}$ (łatwe sprawdzenie), więc $\overline{S} = \{(u,v) : |u| = 1,\ v \in \mathbf{R}\sqrt{u}\}$. Warunek $v \in \mathbf{R}\sqrt{u}$ jest równoważny $\mathrm{Im}(\sqrt{u}\,\overline{v}) = 0$; łatwo tez sprawdzić, że dla $u \in \mathrm{U}$ mamy: $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2+2u_1}}[(1+u_1) + iu_2]$ dla $u \neq -1$, $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2-2u_1}}[u_2 + i(1-u_1)]$ dla $u \neq 1$. Rozłóżmy $\overline{S}$ na sumę dwóch otwartych w $\overline{S}$ podzbiorów: $\overline{S} = S_1 \cup S_2$, określonych warunkami $u \neq -1$ (dla S_1) i $u \neq 1$ (dla S_2); mamy wtedy: $S_1 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_1 = 0\}$, $S_2 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_2 = 0\}$, gdzie $g_0 := |u|^2 - 1 = u_1^2 + u_2^2 - 1$, a $g_1 := u_2 v_1 - (1+u_1)v_2$ i $g_2 := (1-u_1)v_1 - u_2 v_2$ (części urojone liczb $[(1+u_1)+iu_2]\overline{v}$ i $[u_2 + i(1-u_1)]\overline{v}$ odpowiednio). Zauważmy teraz, że na S_1 jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_1,v_2)} = -2u_1(1+u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_2,v_2)} = -2u_2(1+u_1)$, a na S_2 jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z

wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_1,v_1)} = 2u_1(1-u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_2,v_1)} = 2u_2(1-u_1)$; zatem $\nabla g_0, \nabla g_1$ są lin. niezal. na S_1, a $\nabla g_0, \nabla g_2$ są lin. niezal. na S_2, a więc obie częsci S_1, S_2 powierzchni $\overline{S}$ są gładkie. Weźmy odworowanie $\psi : \mathrm{U} \times \mathbf{R} \to \overline{S}$, $\psi(z,t) := (z^2, tz)$; jasne, że ψ jest ciągłą surjekcją, przy czym $\psi(z,t) = \psi(z',t') \iff (z',t') = \pm(z,t)$, a więc mamy ciągłą bijekcję $\tilde{\psi} : M := (\mathrm{U} \times \mathbf{R})/_{\pm} \to \overline{S}$; odwzorowanie odwrotne $\tilde{\psi}^{-1}(u,v) = \sqrt{u}(1, \frac{v}{u})$ też jest ciągłe, więc ψ jest homeomorfizmem wstęgi Möbiusa M na $\overline{S}$.

6. Niech $H := \{(x,y,z) : x \sin z - y \cos z = 0\}$ (tzw. *helikoida*). Dowieść, że: 1^0 H jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^3$; 2^0 H jest homeomorficzna z $\mathbf{R}^2$. 3^0 Wyznaczyć przecięcie H z płaszczyzną $\Sigma(\mathrm{p}_0)$ styczną do H w punkcie $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$; 4^0 dowieść, że $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ zawiera dwie krzywe, przecinające się prostopadle w punkcie p_0.

6. 1^0 $H = h^{-1}(0)$, gdzie $h(x,y,z) := x \sin z - y \cos z$; skoro $\nabla h = [\sin z, -\cos z, x\cos z + y \sin z] \neq 0$, to H jest powierzchnią gładką. 2^0 Niech $\phi(t,u) := (t\cos u, t \sin u, u)$; wtedy $\phi(\mathbf{R}^2) = H$: $h \circ \phi(t,u) = 0$ oraz $x \sin z - y \cos z = 0 \Rightarrow \phi(x\cos z + y \sin z, z) = (x,y,z)$; ϕ jest injektywne: $\phi(t,u) = (x,y,z) \Rightarrow u = z$ & $t = x \cos z + y \sin z$; zarówno ϕ, jak i $\phi^{-1} : H \to \mathbf{R}^2$, są ciągłe: $\phi^{-1}(x,y,z) = (x\cos z + y \sin z, z)$; stąd teza. 3^0 Oznaczmy dla wygody $c := \cos z_0$, $s := \sin z_0$, $d := cx_0 + sy_0$; wtedy $|d|$ jest odległością p_0 od osi $0z$: $x_0^2 + y_0^2 = (cx_0 + sy_0)^2 + (sx_0 - cy_0)^2 = d^2$. $T_{\mathrm{p}_0}(H) = \ker \nabla h(\mathrm{p}_0) = \ker[s, -c, d]$ jest rozpięta przez $[c, s, 0]^T$ i $[-sd, cd, 1]^T$, więc $\Sigma(\mathrm{p}_0) = \{(x_0 + ct - sdu, y_0 + st + cdu, z_0 + u) : (t,u) \in \mathbf{R}^2\}$; stąd $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisana jest równaniem $0 = x \sin z - y \cos z = (x_0 + ct - sdu)(s \cos u + c \sin u) - (y_0 + st + cdu)(c \cos u - s \sin u) = (t+d)\sin u - du \cos u$. 4^0 *Przypadek* $d \neq 0$: $(t+d)\sin u - du \cos u = 0$ przy $\sin u \neq 0$ oznacza $t = d(u \operatorname{ctg} u - 1)$, a przy $\sin u = 0$ oznacza $u = 0$; wobec tego przez p_0 przechodzą dwie krzywe z $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$: $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + d[c(u \operatorname{ctg} u - 1) - su, s(u \operatorname{ctg} u - 1) + cu, \frac{1}{d}u]$ oraz $p_2(t) = \mathrm{p}_0 + t[c, s, 0]$ (prosta pozioma), przy czym $p_1'(0) = [-sd, cd, 1]$ jest prostopadły do $p_2'(0) = [c, s, 0]$. *Przypadek* $d = 0$: Teraz $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisane jest warunkiem $t \sin u = 0$; $t = 0$ daje prostą pionową $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + u[0,0,1]$, zaś $u = n\pi$ daje proste poziome $p_{2,n}(t) = \mathrm{p}_0 + [ct, st, n\pi]$, przecinające prostopadle $p_1(u)$.

7. Dowieść, że dla dowolnych funkcji $a, b, c \in C^k(\mathbf{R})$, $k \geqslant 1$, zbiór $S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$, gdzie $F(x,y,z) := a(z)x^2 + 2b(z)xy + c(z)y^2 - 1$, jest (regularną) powierzchnią klasy C^k w $\mathbf{R}^3$.

7. Tożsamość $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) F(x,y,z) = 2F(x,y,z) + 2$ sprawia, że $(F_x', F_y') \neq 0$ w każdym punkcie S.