Zadania z Geometrii Różniczkowej Seria 3 Grudzień 2010

2. Obliczyć całki: (a) $\int_L e^x\big((1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy\big)$, gdzie L jest brzegiem obszaru $\{0 \leqslant y \leqslant \sin x,\, 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$; (b) $\int_L (\vec{A}\, d\vec{l})$, jeśli $\vec{A} = xz[6z-3xy, 2x, 3x]$, a L jest brzegiem powierzchni $S = \{z = xy,\, x^2+y^2 \leqslant 1,\, y \geqslant 1\}$ zorientowanym "do góry"; (c) $\int_S (\vec{A}\, d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = \frac{[x,\,y,\,z]}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $S = \{\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\, x^2+y^2+z^2 \geqslant b^2,\, z \geqslant 0\}$ oraz $0 < a < b < c$ są zadane; (d) $\int_S (\vec{A}\, d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = [xz, x^2y, y^2z]$, a $S = \partial\{0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1; x,y \geqslant 0\}$; (e) $\int_S (\vec{A}\, d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = z\big[e^x \sin y, e^x \cos y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big]$, a $S = S_1 \cup S_2$ składa się z dwoch półsfer, zawartych w brzegu bryły $\{1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\, y \geqslant 0\}$. W punktach (a), (c), (d) i (e) przyjmujemy orientację zewnętrzną brzegu.

3. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią zawartą w sferze $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$, a $\omega := \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Dowieść, że przy stosownej orientacji S wartość $\frac{1}{3}\int_S \omega$ jest objętością bryły $[0,1]S := \{r\vec{p} : r \in [0,1], \vec{p} \in S\} \subset \mathbb{R}^3$.

4. (a) Niech $\mathcal{O} := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O})$, $d\theta = 0$ oraz $\int_{x_1^2+x_2^2=1} \theta = 0$, to θ jest formą zupełną.
(b) Niech $\mathcal{O}_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_3$; wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O}_0)$, $d\theta = 0$ i $\int_{x_1^2+x_2^2=1, x_3=0} \theta = 0$, to θ jest formą zupełną.

5. Niech $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subset \mathcal{O} := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dowieść, że jeśli $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O})$, $d\omega = 0$ i $\int_S \omega = 0$, to ω jest zupełna. *Wskazówka.* Wykorzystać ściągalność zbiorów $\mathcal{O}_+ = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_-)e_3$, $\mathcal{O}_- = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+)e_3$ oraz wynik zadania 4(b).

8. Niech $\mathcal{O} := \mathbb{R}^n \setminus 0$ oraz $\omega := \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} x_r\, dx_1 \wedge ...\widehat{dx_r}... \wedge dx_n \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O})$. (a) Wyprowadzić tożsamość $\omega = x_1^n d\big(\frac{x_2}{x_1}\big) \wedge \ldots \wedge d\big(\frac{x_n}{x_1}\big)$. (b) Dowieść, że $d(f \cdot \omega) = 0 \iff \big(f$ jest dodatnio jednorodna stopnia $-n\big)$. (c) Znaleźć formę pierwotną dla $f \cdot \omega$ na $\mathcal{O}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$, jeśli $f(x) = x_1^{-n} g\big(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\big)$ dla $x \in \mathcal{O}^+$.

18. Na $\mathbb{R}^3$ dane są trzy pola wektorowe:

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}(1+x^2-y^2-z^2)\tfrac{\partial}{\partial x} + (xy-z)\tfrac{\partial}{\partial y} + (xz+y)\tfrac{\partial}{\partial z} \\ Y &= (xy+z)\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{1}{2}(1-x^2+y^2-z^2)\tfrac{\partial}{\partial y} + (yz-x)\tfrac{\partial}{\partial z} \\ Z &= (xz-y)\tfrac{\partial}{\partial x} + (yz+x)\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{1}{2}(1-x^2-y^2+z^2)\tfrac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

(a) Sprawdzić, że w każdym punkcie $p = (x,y,z)$ wartości $(X(p), Y(p), Z(p))$ tworzą bazę ortogonalną w przestrzeni stycznej $\mathsf{T}_p\mathbb{R}^3$;

(b) Obliczyć $[X,Y]$, $[Y,Z]$,$[Z,X]$ i wyrazić wynik w bazie (X,Y,Z).

(c) Niech $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ i niech $\varphi : \Omega \to \Omega$ oznacza odwzorowanie

$$\varphi(x,y,z) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\Big).$$

Wykazać, że φ jest dyfeomorfizmem i obliczyć $\mathsf{T}\varphi(X)$, $\mathsf{T}\varphi(Y)$, $\mathsf{T}\varphi(Z)$.

19. Niech M będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, niech także $r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Definiujemy pole wektorowe na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$F(r) = Mr.$$

Jakie warunki musi spełniać M aby pole to miało **(a)** potencjał wektorowy, **(b)** potencjał skalarny? Znaleźć, jeśli istnieją potencjały, dla

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

20. Niech $\mathcal{O} = \{(x,y,z) :\ z > 0\}$. Obliczyć

$$\theta = \int_0^1 (\imath(\frac{\partial}{\partial t})\varphi^*\omega)\mathsf{d}t$$

i sprawdzić, że $\mathsf{d}\theta = \omega$ dla

$$\begin{aligned} \omega &= \tfrac{1}{z^3}(x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y) \quad \text{dla} \quad z > 0 \\ \varphi &: [0,1] \times \mathcal{O} \ni (t,x,y,z) \longmapsto (tx, ty, z^t) \end{aligned} .$$

21. Obliczyć strumień pola $A = y\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial y} + x^2\frac{\partial}{\partial z}$ przez powierzchnię $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 = 1, z \in [1,2]\}$ zorientowaną na zewnątrz.

22. Niech $\omega = x\mathsf{d}y + y\mathsf{d}z + z\mathsf{d}x$ będzie jednoformą na $\mathbb{R}^3$. Udowodnić, że jeśli funkcja gładka $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $\mathsf{d}(f\omega) = 0$ to $f = 0$.

23. Obliczyć całkę z formy różniczkowej

$$\omega = x^3\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y^2\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

po powierzchni bocznej bryły obrotowej

$$B = \{(x,y,z) : \ \ 0 \leqslant z \leqslant 3, \ x^2+y^2+1 \leqslant z^2\}$$

zorientowanej jak w twierdzeniu Stokesa.

24. Wyrazić dywergencję pola wektorowego we współrzędnych parabolicznych w $\mathbb{R}^3$ (ξ, η, φ).

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi \\ y &= \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi \\ z &= \tfrac{1}{2}(\xi - \eta) \end{aligned}$$

Wskazówki i rozwiązania niektórych zadań:

2. Zastosować twierdzenie Stokesa. *Odp.* (a) $I = -\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $2\pi\left(1 - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}\right)$; (d) $\frac{\pi}{8}$; (e) $\frac{3}{2}\pi$.

3. $r^2dr \wedge \omega = dx \wedge dy \wedge dz$, więc sprowadzając całkę wielokrotną do całki iterowanej mamy $|[0,1]S| = \int_{[0,1]S} r^2dr \wedge \omega = \int_0^1 r^2dr \cdot \int_S \omega$.

4. (a) Ściągalność zbiorów $\mathcal{O}_\pm := \mathcal{O} \setminus (\mathbb{R}_\mp)e_2$ daje $\exists f_\pm \in \Omega^0(\mathcal{O}_\pm) : \theta = df_\pm$ na $\mathcal{O}_\pm$; różnica $f := f_+ - f_-$ jest stała na obu spójnych składowych $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, tzn. na półpłaszczyznach $\{x_1 > 0\}$ i $\{x_1 < 0\}$. Dzieląc γ na dwa łuki o końcach $p = (1,0)$ i $q = (-1,0)$ dostajemy $0 = \int_\gamma \theta = \big(f_+(q) - f_+(p)\big) + \big(f_-(p) - f_-(q)\big) = f(q) - f(p)$, więc obie stałe są równe: $f_+ = f_- + c$. Stąd f_+ ma przedłużenie do gładkiej funkcji na $\mathcal{O}$, której różniczką jest θ. (b) Dowód identyczny; jako $\mathcal{O}_\pm$ bierzemy dopełnienia stosownych półpłaszczyzn w $\mathbb{R}^3$.

5. $\big($ściągalność $\mathcal{O}_\pm\big) \Rightarrow \exists\theta_\pm \in \Omega^1(\mathcal{O}_\pm) : \omega = d\theta_\pm$ na $\mathcal{O}_\pm$. Niech $S_\pm$ będą górną i dolną półsferą, zaś γ — okręgiem $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, stanowiącym wspólny brzeg $S_\pm$. Z tw. Stokesa $0 = \int_S \omega = \int_{S_+} d\theta_+ + \int_{S_-} d\theta_- = \int_\gamma \theta_+ - \int_\gamma \theta_- = \int_\gamma(\theta_+ - \theta_-)$; zarazem $\theta_0 := \theta_+ - \theta_-$ na $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$ jest zamknięta (bo $d\theta_\pm = \omega$), więc $\exists f \in \Omega^0(\mathcal{O}_0) : df = \theta_+ - \theta_-$ na $\mathcal{O}_0$ (zadanie 4(b)). Przedstawmy f w postaci $f = f_+ - f_-,\ f_\pm \in \Omega^0(\mathcal{O}_\pm)$, np. biorąc $f_+ = h\left(\frac{x_3}{\|x\|}\right) \cdot f$, gdzie $h \in \Omega^0(\mathbb{R})$ jest taka, że $h(t) = \begin{cases} 1, & t<-1/2 \\ 0, & t>1/2 \end{cases}$. Wtedy $\theta_\pm - df_\pm \in \Omega^1(\mathcal{O}_\pm)$ oraz $\theta_+ - df_+ = \theta_- - f_-$ na $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, więc $\theta_\pm - df_\pm$ sklejają się do jednej gładkiej formy θ na $\mathcal{O} = \mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_-$; jest jasne, że $d\theta = \omega$.