Geometria różniczkowa 2010/2011, zadania domowe, 18.01.2011

Zadanie 1. Niech g będzie kanoniczną metryką na $\mathbb{R}^3$ oraz $g_{\mathbb{S}^2}$ będzie jej obcięciem do sfery jednostkowej $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Na $\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,1)$ wprowadźmy współrzędne stereograficzne (ξ, η) wzorem $z = \xi + i\eta = \frac{x+iy}{1-z}$. Wykazać, że metryka $g_{\mathbb{S}^2}$ oraz stowarzyszona z nią forma objętości $\Omega_{g_{\mathbb{S}^2}}$ mają postać:

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{S}^2} &= \frac{4}{(1+|z|^2)^2}(d\xi \otimes d\xi + d\eta \otimes d\eta), \\ \Omega_{g_{\mathbb{S}^2}} &= \frac{4}{(1+|z|^2)^2}(d\xi \wedge d\eta). \end{aligned}$$

Zadanie 2. Niech S^2 będzie sferą dwuwymiarową z metryką

$$g = \mathsf{d}\vartheta \otimes \mathsf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\, \mathsf{d}\varphi \otimes \mathsf{d}\varphi$$

indukowaną z $\mathbb{R}^3$. Niech x, y, z oznaczają funkcje na S^2 zadane przez obcięcie odpowiednich współrzędnych z $\mathbb{R}^3$ do sfery S^2. Sprawdzić, czy formy $\mathsf{d}x$, $\mathsf{d}y$, $\mathsf{d}z$, $*\mathsf{d}x$, $*\mathsf{d}y$, $*\mathsf{d}z$ na S^2 są formami własnymi laplasjanu. Z jakimi wartościami własnymi?

Zadanie 3. Wyrazić dywergencję pola wektorowego i laplasjan (na funkcjach) we współrzędnych parabolicznych w $\mathbb{R}^3$ (ξ, η, φ).

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi \\ y &= \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi \\ z &= \tfrac{1}{2}(\xi - \eta) \end{aligned}$$

Zadanie 4. Wyrazić laplasjan jednoformy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych parabolicznych (ξ, η).

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi\eta} \\ y &= \tfrac{1}{2}(\xi - \eta) \end{aligned}$$

Zadanie 5. Znaleźć metrykę na torusie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ pochodzącą od zanurzenia w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x &= (a + b\sin\theta)\cos\phi \\ y &= (a + b\sin\theta)\sin\phi \\ z &= b\cos\theta \end{aligned}$$

Wyrazić laplasjan na funkcjach, $1-$ i $2-$formach we współrzędnych (θ, ϕ).

Zadanie 6. Niech g będzie kanonicznym tensorem metrycznym na $\mathbb{R}^n$: $g = \sum_1^n \mathsf{d}x_i \otimes \mathsf{d}x_i$ gdzie $(x_1, \ldots, x_n)$ są współrzędnymi kartezjańskimi. Niech $\Delta = -\mathsf{d}\delta - \delta\mathsf{d}$ będzie laplasjanem na formach. Wykazać, że $\Delta(f\mathsf{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x_k) = \left[(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}) f \right] \mathsf{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x_k$.

Wskazówka: Sprawdzić następujące wzory:

- $** = (-1)^{k(n-k)}$ na k–formach,
- $\delta = (-1)^{kn+1} * \mathsf{d} *$ na $(k+1)$–formach,
- $* \mathsf{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x^k = \mathsf{d}x^{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x^n$,
- $* \mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x^n = (-1)^{A(i,k,n)} \mathsf{d}x^1 \wedge \ldots \mathsf{d}x^{i-1} \wedge \mathsf{d}x^{i+1} \ldots \wedge \mathsf{d}x^k$, $i = 1, \ldots, k$,
- $* \mathsf{d}x^i \wedge (\mathsf{d}x^{k+1} \wedge \ldots \mathsf{d}x^{j-1} \wedge \mathsf{d}x^{j+1} \ldots \wedge \mathsf{d}x^n) = (-1)^{B(i,j,k,n)} \mathsf{d}x^j \wedge (\partial_i \lfloor \mathsf{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x^k)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = k+1, \ldots, n$

W dwóch ostatnich wzorach znaleźć jawną postać funkcji A i B.