Seria zadań 1, Teoria Grup

Zadanie 1. Komutatorem grupy G jest podgrupa generowana przez elementy postaci $ghg^{-1}h^{-1}$. Wykazać, że komutatorem grupy permutacji S_n jest podgrupa alternująca $A_n \subset S_n$.
Wskazówka: grupa alternująca jest generowana przez cykle długości 3 i każdy cykl długości 3 jest komutatorem transpozycji.

Zadanie 2. Wykazać, że $\{\mathrm{id}, (12)(34)\}$ jest podgrupą normalną w grupie $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ oraz $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ jest podgrupą normalną w grupie alternującej A_4, natomiast $\{\mathrm{id}, (12)(34)\}$ nie jest podgrupą normalną A_4.

Zadanie 3. Dowieść, że dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ istnieje permutacja $\rho \in S_n$ taka, że $\sigma^{-1} = \rho\sigma\rho^{-1}$.
Wskazówka: dla permutacji σ_1 σ_2 istnieje ρ takie że $\sigma_1 = \rho\sigma_2\rho^{-1}$ wtedy i tylko wtedy gdy σ_1 i σ_2

Zadanie 4. Niech G będzie grupą oraz $D(G) = \{a^{-1}b^{-1}ab : a, b \in G\}$.

- Wykazać, że $D(G)$ jest podgrupą normalną G.
- Niech $\pi : G \to H$ będzie homomorfizmem. Wykazać, że $\pi(D(G)) \subset D(H)$ oraz jeśli π jest epimorfizmem to $\pi(D(G)) = D(H)$.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie z dokładnością do izomorofizmu grupy rzędu < 7.

Zadanie 6. Znaleźć centrum grupy Heisenberga H:

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zadanie 7. Wykazać, że liczba cząstek jakie można utworzyć umieszczając atomy q rodzajów w wierzchołkach ośmiościanu wynosi $k(q) = \frac{1}{2}q^2(q^4 + 3q^2 + 12q + 8)$.

Zadanie 8. Znaleźć wszystkie (z dokładnością do izmorofizmu działań) tranzytywne działania grupy kwaternionowej.

Zadanie 9. Znaleźć wszystkie endomorfizmy D_4 w D_4.
Wskazówka: skorzystać z prezentacji grupy dihedralnej.

Zadanie 10. Znaleźć liczbę elementów $SL(2, \mathbb{Z}_p)$.
Wskazówka: skorzystać z tranzytywnego działania $SL(2, \mathbb{Z}_p)$ na przestrzeni kierunków w $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ gdzie kierunek wyznaczony przez niezerowy wektor $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ przeprowadzamy na kierunek wyznaczony przez wektor $g \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$. Znaleźć grupę izotropii $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.