Seria zadań, Algebra z geometria

Zadanie 1. Prosze zrobić zadania Zad 199b, 200b, 202, 203, 318, 319, ze zbioru zadań *"Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami."* pod redakcją J. Jezierskiego.

Zadanie 2. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z bazą $(1, 2, 3)$, $(-1, -2, 0)$ i $(0, 1, 2)$. Znaleźć bazę dualną do zadanej.

Zadanie 3. Niech $T : \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}^2$ będzie operatorem liniowym zadanym formułą

$$Tw = \begin{bmatrix} w(1) \\ w'(0) \end{bmatrix}.$$

Znaleźć $T'(x)$ gdzie $T' : \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R}_2[\cdot]'$ jest operatorem sprzężonym oraz $x = \begin{bmatrix} 1, & 2 \end{bmatrix}$. Niech $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ będzie bazą $\mathbb{R}_2[\cdot]$. Wykazać, że bazą sprzężoną jest $\mathcal{E}' = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ gdzie

$$< \phi_1, w >= w(0), < \phi_2, w >= w'(0), < \phi_3, w >= \frac{w''(0)}{2}.$$

Niech

$$\mathcal{F} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}).$$

Znaleźć bazę sprzężoną $\mathcal{F}'$ oraz macierz operatora $[T']^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{F}'}$.

Zadanie 4. Zbadać układ i znaleźć, w zależności od wartości parametru λ, jego rozwiązanie ogólne:

a) $\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$