Praca domowa I

Javier de Lucas

Formy wieloliniowe

Zadanie 1. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową i niech $A : V \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym. Pokaż, że $\Lambda^n A : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ postaci

$$\Lambda^n A(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) := (Av_1) \wedge \ldots \wedge (Av_n)$$

ma postać $(\Lambda^n A)(w) = (\det A)w$ dla dowolnego $w \in \Lambda^n(V)$.

Zadanie 2. Wprowadzić następujące $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ do postaci kanonicznej i ustalić jej rząd:

$$\omega = \theta^1 \wedge \theta^2 + 2\theta^2 \wedge \theta^3 + 3\theta^3 \wedge \theta^1, \quad \omega = \theta^1 \wedge \theta^3 + 3\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^1 \wedge \theta^4$$

Zadanie 3. Niech $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ i niech $v \in V$. Zdefiniujemy

$$\iota_v\omega(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \omega(v, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

Dowieść, że jeżeli $\omega^1 \in \Lambda^k(V^*)$ i $\omega^2 \in \Lambda^p(V^*)$, to

$$\iota_v(\omega^1 \wedge \omega^2) = (\iota_v\omega^1) \wedge \omega^2 + (-1)^k\omega^1 \wedge \iota_v\omega^2.$$

Formy różniczkowe

Zadanie 4. Napisz następujące formy różniczkowe we współrzędnych biegunowych

$$\omega := \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}, \qquad \omega := \sqrt{x^2 + y^2}dx \wedge dy.$$

Napisz następujące formy różniczkowe we współrzędnych sferycznych

$$\omega := xdy + ydz + zdx, \qquad \omega := xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$
$$\omega := x^2dy \wedge dz + y^2dz \wedge dx + z^2dx \wedge dy.$$

Zadanie 5. Obliczyć pochodną zewnętrzną następujących form

$$\omega_1 := e^{xy+z^2}dx, \qquad \omega_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \ldots \wedge dx_n$$

wdzie $\widehat{dx_i}$ oznacza, że ten wyraz został wykreślony z iloczynu zewnętrnego.

Zadanie 6. Niech

$$\alpha := xdx - ydy, \quad \beta := zdx \wedge dy + xdy \wedge dz, \quad \gamma := zdy$$

będą formami różniczkowymi na $\mathbb{R}^3$. Obliczyć

- $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$,
- $d\alpha, d\beta, d\gamma$.

Cofnięcie form różniczkowych, zamiana zmiennych, pochodna i iloczyn zewnętrzny

Zadanie 7. Niech $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i $m < n$. Pokaż, że jeżeli $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ i $k > m$ to $\phi^*\omega = 0$.

Zadanie 8. Niech $\phi : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i niech $\omega = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$. Pokaż, że

$$\phi^*\omega = \det[T\phi]dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n,$$

gdzie

$$[T\phi] := \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Zadanie 9. Niech $\phi : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1^3 x_2, \log(x_1 + x_2)) \in \mathbb{R}^2$ i niech $\omega = dy_1 \wedge dy_2$. Obliczyć $\phi^*\omega$.

Zadanie 10. Niech $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Obliczyć $\phi^*\omega$ dla:

$$\phi : (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[^2 \mapsto (r \cos\phi \sin\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\theta) \in \mathbb{R}^3$$

$$\phi : (\tau, \phi, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[^2 \mapsto (a\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}\cos\phi, a\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}\sin\phi, a\frac{\sinh\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma}) \in \mathbb{R}^3$$

.

Analiza III
Praca domowa

Zadanie 11. Niech $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ będą współrzędnymi na $\mathbb{R}^{2n}$ i niech

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Obliczyć $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n-razy).

Zadanie 12. Niech $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$ będą współrzędnymi na $\mathbb{R}^{2n+1}$ i niech

$$\omega := dz + \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i.$$

Obliczyć $\alpha \wedge (d\alpha \wedge \ldots \wedge d\alpha)$ (n-razy).

Pola wektorowe

Zadanie 13. Znaleźć przestrzeń styczną w punkcie $(2, 1, 0)$ powierzchni

$$x^2 - y^2 + z^2 = 3.$$

Czy pole wektorowe $y\partial_x + x\partial_y$ jest styczne do tej powierzchni. Znaleźć krzywą całkową tego pola wektorowego przechodząc przez punkt $(2, 1, 0)$.

Zadanie 14. Znaleźć przestrzeń styczną w punktach $(1, 0, 0)$ oraz $(0, 1, 0)$ krzywej

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x + y + z = 1.$$

Lemmat Poincarego, formy zamknięty i zupełne

Zadanie 15. Pokaż, że jeżeli α i β są formami zamkniętymi, to $\alpha \wedge \beta$ jest zamknięta.

Zadanie 16. Pokaż, że forma

$$\omega = e^{x^2+y^2}(\sinh(2xy)dx + \cosh(2xy)dy)$$

jest zamknięta.

Analiza III
Praca domowa

Zadanie 17. Niech

$$\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

będzie 1-formą różniczkową na $\mathbb{R}^3$ i $d\omega = 0$. Zdefiniujemy

$$f(x,y,z) = \int_0^1 [a(tx,ty,tz)x + b(tx,ty,tz)y + c(tx,ty,tz)z]dt.$$

Dowieść, że $df = \omega$. Korzystając z tego, znaleźć funkcję $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ taką, że $dg = \alpha$ dla

$$(a)\ \omega = \frac{ydx - xdy}{2x^2 - xy + y^2}, \qquad \mathcal{O} := \{(x,y) : y > 0\},$$

$$(b)\ \omega = \frac{yzdx - x\log x(zdy + 2ydz)}{xy^2z^3}, \quad \mathcal{O} := \{(x,y,z) : x,y,z > 0\}.$$

Zadanie 18. Znaleźć formę $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O})$ taką, że $d\theta = \omega$ dla

$$\omega = \frac{1}{z^3}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \in \Omega^2(\mathcal{O}),$$

gdzie $\mathcal{O} := \{(x,y,z) : z > 0\}$ oraz $\phi : \mathcal{O} \times [0,1] \to \mathcal{O}$ jest dane wzorami

$$(a)\ \phi(x,y,z,t) = (tx, ty, 1 - t + tz), \qquad (b)\ \phi(t,x,y,z) := (tx, ty, z^t).$$