Praca domowa I

Javier de Lucas

Forme różniczkowe: Cofnięcie, zamiana zmiennych, pochodna i iloczyn zewnętrzny

Zadanie 1. Napisz następujące formy różniczkowe we współrzędnych biegunowych

$$\omega := \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}, \qquad \omega := \sqrt{x^2 + y^2} dx \wedge dy.$$

Napisz następujące formy różniczkowe we współrzędnych sferycznych

$$\omega := xdy + ydz + zdx, \qquad \omega := xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$
$$\omega := x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy.$$

Zadanie 2. Obliczyć pochodną zewnętrzną następujących form różniczkowych

$$\omega_1 := e^{xy+z^2} dx, \qquad \omega_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Zadanie 3. Niech

$$\alpha := xdx - ydy, \quad \beta := zdx \wedge dy + xdy \wedge dz, \quad \gamma := zdy$$

będą formami różniczkowymi na $\mathbb{R}^3$. Obliczyć

- $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$,
- $d\alpha, d\beta, d\gamma$.

Zadanie 4. Niech $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i $m < n$. Pokaż, że jeżeli $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ i $k > m$ to $\phi^*\omega = 0$.

Zadanie 5. Niech $\phi : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i niech $\omega := dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$. Pokaż, że

$$\phi^*\omega = \det[T\phi] dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

gdzie

$$[T\phi] := \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Niech $\phi : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1^3 x_2, \log(x_1 + x_2)) \in \mathbb{R}^2$ i niech $\omega = dy_1 \wedge dy_2$. Obliczyć $\phi^*\omega$.

Zadanie 7. Niech $\omega := dx \wedge dy \wedge dz$. Obliczyć $\phi^*\omega$ dla:

$$\phi : (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[^2 \mapsto (r \cos\phi \sin\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\theta) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\phi : (\tau, \phi, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[^2 \mapsto \left(\frac{a \sinh\tau \cos\phi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, \frac{a \sin\phi \sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}, \frac{a \sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 8. Niech $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ będą współrzędnymi na $\mathbb{R}^{2n}$ i niech

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Obliczyć $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n-razy).

Zadanie 9. Niech $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$ będą współrzędnymi na $\mathbb{R}^{2n+1}$ i niech

$$\omega := dz + \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i.$$

Obliczyć $\alpha \wedge \overbrace{d\alpha \wedge \ldots \wedge d\alpha}^{n-razy}$.

Gradient, rotacja i dywergencja

Zadanie 10. Podać postać gradientu, rotacji i dywergencji w następujących współrzędnych

- Walcowych
$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z.$$
- Sferycznych
$$x = r\cos\phi\sin\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$
- Parabolicznych walcowych
$$x = \sigma\tau, \quad y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad z = z.$$

Twierdzenie Stokesa

Zadanie 11. Niech

$$\omega := \left(\sin x - \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(\cos y + \frac{x^3}{3}\right)dy + xyzdz,$$

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, z = 1\}$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

Zadanie 12. Niech

$$\omega = xdx + xdy + 2ydz, \qquad \partial C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 = x^2 + y^2, z = x\}.$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

dla odpowiednie wybranego C.

Zadanie 13. Niech

$$\omega := -3xz^2 dy \wedge dz + z^3 dx \wedge dy, \qquad C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}.$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

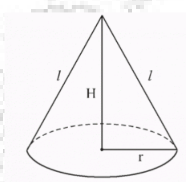
Zadanie 14. Sprawdzić twierdzenie Stokesa dla

$$\omega := x^3 e^y dy \wedge dz - 3x^2 e^y dz \wedge dx, \qquad C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

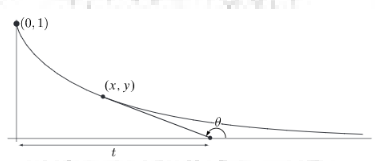
Długość krzywych, pole powierzchni i objęstości bryłych

Zadanie 15. Obliczyć długość kardiody $r(\varphi) = 3 - \cos\varphi$ i pole powierzchni ograniczonej taką krzywą.

Zadanie 16. Obliczyć objętość i powierzchnię boczną następującego stożka:



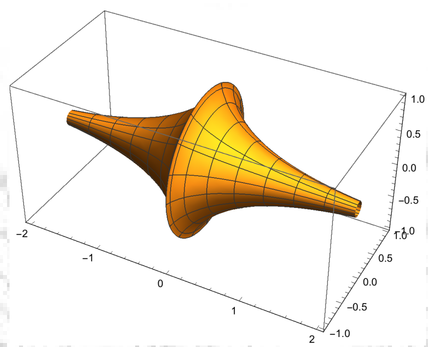
Zadanie 17. Chłopiec spaceruje wdłuż osi OX w kierunku $+X$ z jego psem. Odległość między chłopcem i psem wynosi maksimalnie 1 (długość smyczy). Pies schował kość w punkcie $(0,1)$ i stara się zostać blisko tego punktu. Trajektoria psa podczas spaceru wygląda następująco



Obliczyć długość *traktrysy*, tj. krzywa opisująca ruch psa spacerującego z właścicielem, jako funkcję θ. We współrzędnach kartesjańskich trajektoria psa ma postać

$$(\cos\theta + \ln[\tan(\theta/2)], \sin\theta), \qquad \pi/2 \le \theta \le \pi.$$

Zadanie 18. Obliczyć pole powierzchni i objętość pseudosfery, tj. region w $\mathbb{R}^3$ postaci



ograniczony powierzchnią

$$[-\infty, \infty] \times [0, 2\pi] \ni (t, \varphi) \mapsto (t - \operatorname{th} t, \cos\varphi \operatorname{sech} t, \sin\varphi \operatorname{sech} t) \in \mathbb{R}^3.$$

Lemmat Poincarego, formy zamknięty i zupełne

Zadanie 19. Pokaż, że jeżeli α i β są formami zamkniętymi, to $\alpha \wedge \beta$ jest zamknięta.

Zadanie 20. Pokaż, że forma

$$\omega = e^{x^2+y^2}(\sinh(2xy)dx + \cosh(2xy)dy)$$

jest zamknięta.

Zadanie 21. Niech

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

będzie 1-formą różniczkową na $\mathbb{R}^3$ i $d\omega = 0$. Zdefiniujemy

$$f(x, y, z) = \int_0^1 [a(tx, ty, tz)x + b(tx, ty, tz)y + c(tx, ty, tz)z]dt.$$

Dowieść, że $df = \omega$. Korzystając z tego, znaleźć funkcję $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ taką, że $dg = \alpha$ dla

$$(a)\ \omega = \frac{ydx - xdy}{2x^2 - xy + y^2}, \qquad \mathcal{O} := \{(x, y) : y > 0\},$$

$$(b)\ \omega = \frac{yzdx - x\log x(zdy + 2ydz)}{xy^2z^3}, \quad \mathcal{O} := \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}.$$

Zadanie 22. Znaleźć formę $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O})$ taką, że $d\theta = \omega$ dla

$$\omega = \frac{1}{z^3}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \in \Omega^2(\mathcal{O}),$$

gdzie $\mathcal{O} := \{(x, y, z) : z > 0\}$ oraz $\phi : \mathcal{O} \times [0, 1] \to \mathcal{O}$ jest dane wzorami

$$(a)\ \phi(x, y, z, t) = (tx, ty, 1 - t + tz), \qquad (b)\ \phi(t, x, y, z) := (tx, ty, z^t).$$