Zadania z Analizy IV
Seria treningowa - 7 maja 2019

Zadanie 1

Niech
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Sprawdzić, że
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{\pi z} = \delta_0(z).$$

Zadanie 2

Udowodnić, że wzór
$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right) := \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x^2} + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x^2}\right)dx$$
zadaje dystrbucję $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Wykazać, że:
(a) $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$;
(b) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x\pm i0} = \mp\pi\delta'(x) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Zadanie 3

Znaleźć rozwiązanie równania w $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
(a) $xT' = \mathcal{P}(\frac{1}{x})$;
(b) $x^2T' = 1$ (wskazówka: wykazać, że jeśli $f(0) = 0 = f'(0)$ to istnieje g takie, że $f(x) = x^2g(x)$);
(c) $(x+1)T''' = 0$.

Zadanie 4

Wykazać, że $f_\epsilon \to \delta_0$ as $\epsilon \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:
(a) $f_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi}\frac{1}{x^2+\epsilon^2}$, gdy $n = 1$;
(b) $f_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{2\pi}\frac{1}{(\|x\|^2+\epsilon^2)^{3/2}}$, gdy $n = 2$;
(c) $f_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi^2}\frac{1}{(\|x\|^2+\epsilon^2)^2}$, gdy $n = 3$.

Zadanie 5

Dla $a > 0$ niech $f_a(x) := f(ax)$ gdzie $x \in \mathbb{R}^d$. Wykazać, że
$$\mathcal{F}(f_a)(k) = a^{-d}\mathcal{F}(f)(\frac{k}{a}).$$

Zadanie 6

Obliczyć transformatę Fouriera dystrybucji $\delta_0^{(k)}(x)$.

Zadanie 7

Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-algebrą składającą się ze zbiorów przeliczalnych oraz zbiorów mających przeliczalne dopełnienia, należących do nieprzeliczalnego zbioru Ω. Funkcja zbioru P na σ-algebrze $\mathcal{F}$ określona jest następująco: $P(A)$ jest równe 0 lub 1 w zależności od tego czy A jest zbiorem przeliczalnym czy jego dopełnienie jest przeliczalne. Wykazać, że tak zdefiniowana miara P jest przeliczalnie addytywna.

Zadanie 8

Niech $f \in L^1([0,1])$. Pokazać, że:
(a) $x^k f(x) \in L^1([0,1])$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$;
(b) $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 x^k f(x) dx = 0$;
(c) jeśli $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 x^k f(x) dx = a.$$

Zadanie 9

Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x} dx.$$