Analiza III
Praca domowa IV

Homografie

Zadanie 1. Znaleźć obraz obszaru $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ przy homografii $f(z) = (z-i)/(z+i)$.

Zadanie 2. Znaleźć obraz obszaru $D := \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \sqrt{2}\,\mathrm{i}\,|z+i| < \sqrt{2}\}$ przy homografii $f(z) = (z-1)/(z+1)$.

Zadanie 3. Znaleźć homografię, która przekształca zbiór $D := \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$ na $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = 0\}$ i taką, że punktom $1, 2+i, 2-i$ odpowiada punkty $-1, 0, 1$.

Warunki Cauchy'ego-Riemanna

Zadanie 4. Sprawdzić w jakich punktach $z \in \mathbb{C}$ następujące funkcje spełniają warunki Cauchy?ego Riemanna:

$$a)\ f(z) := z^2, \qquad b)\ g(z) := z\mathrm{Im}(z), \qquad c)\ h(z) := |z|^2 + 2z, \qquad d)\ j(z) := |z|.$$

Zadanie 5. Znaleźć funcje holomorficzne postaci $f(z) := u(x,y) + v(x,y)i$ gdzie $z := x + iy$ i

$$a)\ u(x,y) := x^2 - y^2 + xy, \quad b)\ u(x,y) := x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad c)\ u(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Szereg Laurent'a

Zadanie 6. Znajdź rozwinięcie funkcji szereg Laurenta w podanym pierscieniu

$$a)\ f(z) := \frac{1}{(z-2)(z-1)}, \qquad 2 < |z| < +\infty,$$
$$b)\ f(z) := \frac{1}{(z-2)(z-1)}, \qquad 0 < |z-1| < 1,$$
$$c)\ f(z) := (z^3 + 2z)\sin\frac{1}{z}, \qquad 0 < |z| < +\infty.$$

Zadanie 7. Znaleźć część główną (tj. osobliwą) i regularną szeregu Laurenta w pierścieniu $0 < |z| < +\infty$ funkcji

$$f(z) := z^{-10}\arcsin(z).$$

Zadanie 8. Obliczyć szereg Laurenta dla funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danej wzorem

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2(z+2)}$$

we wszystkich pierścieniach wokół punktu $z_0 = 2$.

Zadanie 9. Znaleźć szreg Laurenta dla funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danej wzorem

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4},$$

we wszystkich pierścieniach wokół punktu $z_0 = 0$

Analiza III
Praca domowa IV

Zadanie 10. Znaleźć część główną (tj. osobliwą) i regularną szeregu Laurenta w pierścieniu $0 < |z| < 1/2$ funkcji

$$f(z) := z^{-12} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Zadanie 11. Znajdź obszar zbieżności następujących szeregów Laurenta w danym pierscieniu:

$$a)\ a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & n \geq 0, \\ 2^n, & n < 0, \end{cases} \qquad a_n := \begin{cases} 0, & n \geq 0, \\ 2^{-n-1} - 1, & n < 0. \end{cases}$$

Wzór całkowego Cauchy'ego

Zadanie 12. Znaleźć wszystkie zera następujących funkcji i ich krotność

$$f(z) := (z^3+1)^2 z^4, \qquad g(z) := e^{z^2} - 1, \qquad h(z) := z^2(e^{iz} - 1).$$

Zadanie 13. Określ rodzaj punktów osobliwych dla funkcji:

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+i)^3}, \qquad g(z) := \frac{1}{\sin z}, \qquad h(z) := \mathrm{tg}^2(z), \qquad j(z) := e^{1/(z-2i)}.$$

Zadanie 14. Korzysatając ze wzoru całkowego Cauchy'ego oblicz całkę po zadanach konturach

$$a)\ \int_C \frac{\sin(z)dz}{z+i}, \qquad C - \text{zorientowany dodatnio okrąg } |z+i| = 3,$$

$$b)\ \int_C \frac{dz}{z^2+9}, \qquad C - \text{zorientowany dodatnio okrąg } |z-2i| = 2,$$

$$c)\ \int_C \frac{dz}{(z^2+9)^2}, \qquad C - \text{zorientowany dodatnio okrąg } |z-2i| = 2,$$

$$d)\ \int_C \frac{\sin(z)dz}{(z+2)^4}, \qquad C - \text{kontur zawierający w swym wnętrzu punkt } -2,$$

$$d)\ \int_C \frac{e^z dz}{(z^2-4)^2}, \qquad C - \text{zorientowany dodatnio okrąg } |z+2| = 1/2.$$