Zadania domowe z Analizy III
Seria 4 16.01.2012

Dystrybucje: pochodne, granice ciągów, równania różniczkowe.
Transformaty Fouriera funkcji i dystrybucji.

1. Które z poniższych funkcji: są gładkie, mają zwarty nośnik (podaj nośnik funkcji), są funkcjami Schwartza, zadają dystrybucję regularną, zadają regularną dystrybucję temperowaną?

$$a(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \leqslant 1 \\ 0 & : |x| > 1 \end{cases} ; \quad b(x) = \begin{cases} x & : x < 5 \\ x^2 - 20 & : x \geqslant 5 \end{cases} ; \quad c(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{9}{(x-2)^2-9}\right) & : |x-2| < 3 \\ 0 & : |x-2| \geqslant 3 \end{cases} ;$$

$$d(x) = |x|^4; \quad e(x) = e^x; \quad f(x) = e^{-|x|}\cos x; \quad g(x) = x^{2012}e^{-x^2}; \quad h(x) = \frac{e^{-\sin x}}{1+x^2}; \quad i(x) = e^{-\frac{1}{4+x^4}};$$

2. Oblicz n-tą ($n \in \mathbb{Z}_+$) pochodną dystrybucji regularnych zadanych przez funkcje:

$$a(x) = \max\{1-|x|, 0\}; \quad b(x) = \ln|x|; \quad c(x) = \theta(x)x^m; \quad d(x) = \theta(x)e^{ax}; \quad e(x) = \theta(x)\sin(ax);$$

gdzie: $m \in \mathbb{Z}_+$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\theta(x) = \begin{cases} 1 & : x \geqslant 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$

3. Znajdź wszystkie dystrybucje $T \in D^*(\mathbb{R})$ spełniające równanie:
   a) $(x-1)(x^2-9)T = T_x$, gdzie $< T_x, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx$;
   b) $\sinh(x)T = T_{\sinh(x)}$, gdzie $< T_{\sinh x}, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(x)\varphi(x)\,dx$;
   c) $T'' = P\frac{1}{x}$, gdzie $< P\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\right)\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$;
   d) $T' - xT = \delta_0$, gdzie $< \delta_0, \varphi >= \varphi(0)\,dx$.

4. Czy poniższe funkcje mają transformaty Fouriera? Jeśli tak oblicz je. Czy funkcje zadają regularne dystrybucje temperowane? Jeśli tak oblicz ich transformaty Fouriera.

$$a(x) = x^n; \quad b(x) = e^{-ax}; \quad c(x) = e^{iax}; \quad d(x) = e^{-ax}\theta(x); \quad e(x) = e^{-a|x|};$$

$$f(x) = \theta(2-x)\theta(x); \quad g(x) = \operatorname{sgn} x; \quad h(x) = \frac{\sin x}{1+x^4}; \quad i(x) = \frac{e^{bx}}{1+e^x};$$

gdzie: $n \in \mathbb{Z}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in]0,1[$, $\theta(x) = \begin{cases} 1 & : x \geqslant 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$

5. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Niech $\mathbf{E}$, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będą funkcjami klasy C^1, takimi że dla każdego $t \in \mathbb{R}$: funkcje $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{B}_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowane przez $\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) := \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{B}_t(\mathbf{x}) := \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ są całkowalne.
   Niech $\hat{\mathbf{E}}_t$, $\hat{\mathbf{B}}_t$ oznaczają transformaty Fouriera funkcji $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{B}_t$.
   Niech $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ będą funkcjami: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ t. że $\hat{\mathbf{E}}(t, \mathbf{k}) := \hat{\mathbf{E}}_t(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{B}}(t, \mathbf{k}) := \hat{\mathbf{B}}_t(\mathbf{k})$.
   Niech $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{j} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, będą całkowalne, a $\hat{\rho}$, $\hat{\mathbf{j}}$ będą ich transformatami Fouriera. Dowiedź, że:
   a) $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$ b) $\mathrm{rot}\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} + \partial_t \hat{\mathbf{B}} = 0$
   c) $\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \hat{\rho}$ d) $\mathrm{rot}\mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j} \quad \Leftrightarrow \quad i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}} - \partial_t \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{j}}$

*6. Oblicz granicę ciągu dystrybucji regularnych zadanych przez funkcje f_n:
   a) $f_n(x) = \frac{n}{n^2x^2+1}$ b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx)}{x}\right)^2$
   c) $f_n(x) = n^3 x e^{-n|x|}$ d) $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2x^2+(nx+1)^2} - \frac{n^2}{n^2x^2+(nx-1)^2}$
   e) $f_n(x) = ng(nx)$ gdzie: g jest dowolną funkcją t. że $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$
   Wskazówka: $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \Leftrightarrow T'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T'$.