Praca domowa I

Zadania z jedną i dwoma gwiadzkami są opcjonalne. Zadania z dwoma gwiadzkami są najtrudniejsze.

Ciała

Zadanie 1. Wykazać, że $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 2. Załóż, że $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ jest ciałem i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Które z następujących właściwości są prawdą?

1. $0 \cdot \alpha = 0$.
2. $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$.
3. Każdy element zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element przeciwny.
4. Każdy element $\alpha \neq 0$ zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element odwrotny.
5. $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.
6. $1 + 1 \neq 0$.
7. Jeżeli $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$, to $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Zadanie 3. Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ będzie ciałem. Funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{F}$ nazywamy formalny zapis postaci

$$f = \frac{f_1(\mathfrak{X})}{f_2(\mathfrak{X})},$$

gdzie $f_1(\mathfrak{X})$ i $f_2(\mathfrak{X})$ są wielomianami o współczynnikach w $\mathbb{F}$ i $f_2(\mathfrak{X}) \neq 0$. Ponadto, mówimy, że $f = g$, gdy $f_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) = g_1(\mathfrak{X}) \cdot f_2(\mathfrak{X})$. Zbiór funkcji wymiernych można wyposażyć w dodawanie i mnożenie

$$h + g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) + h_2(\mathfrak{X}) g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}, \qquad h \cdot g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}.$$

Udowodnij, że zbiór funkcji wymiernych o współczynnikach w $\mathbb{F}$ jest ciałem względem tych działań.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{F}$ będzie skończonym ciałem. Udowodnij, że istnieje liczba pierwsza p taka, że $a + a + \cdots + a = 0$ (p razy) dla każdego $a \in \mathbb{F}$.

Zadanie 5. Udowodnij, że zbiór algebraicznych liczb

$$\mathbb{K} = \{a + b\,\zeta_1 + c\,\zeta_2 \,|\, a, b, c \in \mathbb{Q}, \zeta_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \zeta_1^3 = \zeta_2^3 = \zeta_1\zeta_2 = 1\},$$

jest ciałem względem zwykłem dodawania i mnożenia liczb.

Zadanie 6. Dany zbiór liczb podwójnych

$$\mathbb{K} = \{a + b\iota \,|\, a, b \in \mathbb{R}\},$$

gdzie ι, tzw *jedynką Clifforda*, z dodawaniem $\oplus : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ postaci

$$(a + b\iota) \oplus (c + d\iota) = a + c + (b + d)\iota$$

i mnożeniem

$$(a + b\iota) \cdot (c + d\iota) = ac + bd + (ad + bc)\iota$$

jest ciałem?

Zadanie 7. Czy zbiór macierzy

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

jest ciałem względnym dodawania

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \bar{a} & b + \bar{b} \\ 0 & a + \bar{a} \end{bmatrix}$$

i mnożenia

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} + b\bar{a} \\ 0 & a\bar{a} \end{bmatrix}$$

jest ciałem?

Zadanie* 8. Zbuduj wszystkie ciała z pięcioma elementami.

Zadanie 9. Udowodnij, że zbiór liczb postaci: $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, jest ciałem liczbowym. Oznaczamy je $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Natomiast, udowodnij, że zbiór liczb postaci $a+b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, nie jest ciałem liczbowym. Pokaż, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi, jest już ciałem liczbowym.

Zadanie 10. Dane jest ciało $(\mathbb{F}, +, \cdot)$. Mówi się, że $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ jest podciałem $\mathbb{F}$, gdy $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$, gdzie

$$+_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathbb{K}, \qquad \cdot_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in \mathbb{K}$$

jest ciałem. Niech $a + \ldots + a = 0$ (m-razy) dla pewnego $a \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$. Czy zbiór elementów

$$\mathbb{A} = \{1 + 1 + \ldots + 1(p - \text{razy}) \,|\, p \leq m\}$$

zdefiniuje podciało $(\mathbb{A}, +_{\mathbb{A}}, \cdot_{\mathbb{A}})$?

Zadanie 11. Wykaż, że zbiór $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ nie jest ciałem. Znajdź, wszystkie podzbiory $\mathbb{Z}_6$, który są ciałami i ustal ich charakterystykę.

Wielomiany

Zadanie 12. Udowodnij, że suma wszystkich pierwiastków z wielomianu $f_n(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest równa zeru.

Zadanie 13. Dany jest wielomian $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{X}^n$ o współczynnikich w ciele $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ z pierwiastkami $x_1, \ldots, x_n$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'=1}^{n} x_k x_{k'} = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'<k''=1}^{n} x_k x_{k'} x_{k''} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Te wzory to część tzw wzorów Viete'a.

Zadanie* 14. Niech $\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ będzie przestrzenią wszystkich wielomianów o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$ i niech $\mathrm{Map}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ będzie przestrzenią funkcji z $\mathbb{K}$ do $\mathbb{K}$. Udowodnij, że odwzorowanie $\Phi : \mathfrak{P}(\mathfrak{X}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ postaci

$$P(\mathfrak{X}) \to f_P,$$

gdzie f_P to funkcja stowarzyszona z wielomianem $P(\mathfrak{X})$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{K}$ jest skończonym ciałem.

Zadanie 15. Oblicz resztę z dzielenia następujących wielomianów:

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^7 - 4\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5 + 5\mathfrak{X}^4 + 5\mathfrak{X}^3 - 5\mathfrak{X}^2 + 10\mathfrak{X} - 7$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^9 - 8\mathfrak{X}^8 + 15\mathfrak{X}^7 + 5\mathfrak{X}^4 + 9\mathfrak{X} - 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 9\mathfrak{X}^2 + 23\mathfrak{X} - 15$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^8 - 9\mathfrak{X}^7 + 24\mathfrak{X}^6 - 24\mathfrak{X}^5 + 24\mathfrak{X}^4 - 24\mathfrak{X}^3 + 24\mathfrak{X}^2 - 22\mathfrak{X} + 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 8\mathfrak{X} + 15$.

Zadanie 16. Ustal a, b i c aby wielomian o współczynnikach w $\mathbb{R}$ dany wzorem

$$\begin{aligned} f_1(\mathfrak{X}) &= \mathfrak{X}^7 - (a+b+c)\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5(3+ab+ac+bc) - (3a+3b+3c-abc)\mathfrak{X}^4 \\ &+ (2+3ab+3ac+3bc)\mathfrak{X}^3 - (2a+2b+2c+3abc)\mathfrak{X}^2 + 2(ab+bc+ac)\mathfrak{X} - 2abc \end{aligned} \tag{16.1}$$

był podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.

Zadanie* 17. Ustal n aby wielomian o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$ dany wzorem

$$f_n(\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{X}^k$$

był podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 + 1$.

Zadanie 18. Oblicz za pomocą algorytmu Euklidesa największy wspólny dzielnik między

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 2\mathfrak{X}^4 - 22\mathfrak{X}^3 - 8\mathfrak{X}^2 + 117\mathfrak{X} - 90, \qquad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 14\mathfrak{X}^4 + 74\mathfrak{X}^3 + 184\mathfrak{X}^2 + 213\mathfrak{X} + 90$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 8\mathfrak{X}^4 + 8\mathfrak{X}^3 - 62\mathfrak{X}^2 - 153\mathfrak{X} - 90, \qquad f_2(\mathfrak{X}) = 4 + 8\mathfrak{X} + 5\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$.

Zadanie* 19. Dane są wielomiany

$$P(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + a\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + c\mathfrak{X} + 1, \qquad Q(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + c\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} + 1$$

Znajdź warunki dla liczb a, b i c, gdzie $a \neq c$, aby zagwarantować, że $P(\mathfrak{X})$ i $Q(\mathfrak{X})$ mają dwa wspólne pierwiastki. W takim przypadku, oblicz rozwiązania $P(\mathfrak{X}) = 0$ i $Q(\mathfrak{X}) = 0$.

Zadanie** 20. Niech a będzie liczbą wymierną i niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnij, że wielomian o współczynnikach wymiernych

$$\mathfrak{X}^{2^n}(\mathfrak{X} + a)^{2^n} + 1$$

jest nierozkładalny.

Liczby zespolone

Zadanie⋆ 21. Dane są trzy liczby zespolone $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nie na jednej linii, znajdź $z_0 \in \mathbb{C}$ taki, że $f(z_0) \leq f(z)$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, gdzie

$$f(z) = |z_1 - z|^2 + |z_2 - z|^2 + |z_3 - z|^2.$$

Zadanie 22. Znajdź odwrotność liczb zespolonych:

b) $\dfrac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \dfrac{3-i}{1+i} + (\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i) - i^3\,,$

c) $2i(i-1) + \left(\sqrt{3}+i\right)^3 + (1+i)\overline{(1+i)}\,.$

Zadanie 23. Obliczyć wyrażenie

1. $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{1410}\,,$
2. $\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)} + i^{101}\right]^{1993}.$
3. $\dfrac{(2-3i)^3 - (1+i)^2(5-i)}{(4-3i)^2 - i(1+2i)^3}.$

Zadanie 24. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu nad ciałem $\mathbb{C}$

1. $-z^3 + (7+i)z^2 - (12+7i)z + 12i,$
2. $z^4 - 2z^3 + +(2-i)z^2 + 2iz - 2i,$
3. $z^6 - z^4 + z^2 - 1.$

Zadanie 25. Rozwiązać równania:

1. $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i,$
2. $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3,$

Zadanie⋆ 26. Niech z będzie liczbą zespoloną taką, że $|z+1| > 2$. Udowodnij, że $|z^3 + 1| > 1.$

Zadanie 27. Niech $f(z) := z^{-1}, g(z) := \bar{z}$ dla $z \in \mathbb{C}^*$. Wykazać, że dla każdego $p > 1$ istnieje okrąg $C = C(s; r) \subset \mathbb{C}$ (znaleźć środek s i promień r) zawierający p i niezmienniczy względem f i g, tzn. taki, że $f(C) = C$ i $g(C) = C$.

Zadanie 28. Udowodnij, że

$$\sin^{2m-1}\varphi = \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} \binom{2m-1}{m-k} (-1)^{k-1} \sin(2k-1)\varphi.$$

Zadanie 29. Znaleźć $f^{-1}(S) = \{z \in D : f(z) \in S\}$, tzn. przewciwobraz zbioru S, względem odwzorowania $f : D \to \mathbb{C}$, jeśli $D := \mathbb{C}\backslash\{-1\}$, $f(z) := z/(1-z)$, oraz

- $S := K(ir, r)$, gdzie $r > 0$
- $S := \{z \,|\, \mathrm{Im} z < a(1 + \mathrm{Re} z)\}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest ustalone.
- $S := \{z \,|\, 4\mathrm{Im} z > 2 + 3\mathrm{Re} z\}$.

Zadanie** **30.** Dane są parabole $y = cx^2 + d, x = ay^2 + b$, gdzie $c > 0$, $d < 0$, $a > 0$ i $b < 0$. Te parabole mają cztery wspólne punkty z_1, z_2, z_3, z_4. Wykaż, że istnieje okrąg zawierający z_1, z_2, z_3, z_4.