Analiza II, zadania domowe, seria I

1. Wykazać istnienie całek i metodą różniczkowania po parametrze obliczyć je

   (a)
   $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}(ax)}{x(1+x^2)}\,dx, \quad a \in \mathbb{R},$$

   (b)
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right) dx, \quad |a| < 1,$$

   (c)
   $$\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} dx, \quad a > -1,$$

2. Sprawdź czy zbiory $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = \sin\frac{1}{x}, \quad |x| \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$ są otwarte, domknięte, ograniczone, zwarte.

3. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, xyz)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto g(s,t) = (\sin t \cos s, \sin t \sin s, \cos t)$. Znajdź macierze Df, Dg, $Df \cdot Dg$, $Dg \cdot Df$, $D(f \circ g)$, $D(g \circ f)$, gdzie $\cdot$ oznacza mnożenie macierzowe.

4. (GC) Niech $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Sprawdzić, że $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \exists_g \in C^1(]0,\infty[) : f(x,y) = g(x^2+y^2)$.

   Wskazówka: przejść do układu biegunowego.

5. Zapisać dwuwymiarowy operator Laplace'a $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ we współrzędnych parabolicznych (ξ, η). wiążących się ze współrzędnymi kartezjańskimi w następujący sposób $x = \xi\eta$, $y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$

6. Zapisać trójwymiarowy laplasjan $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ we współrzędnych sferycznych (r, θ, ϕ) gdzie $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$.