Seria I

Zad. 1. Wykaż za pomocą indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:
a. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$
b. $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2=\frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3)$
c. $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
d. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \sqrt{n}+1$
e. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{n}$
f. $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Zad. 2. Wykaż za pomocż indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:
a. $n^7 - n$ jest podzielne przez 7
b. $3^{4n+2}+1$ jest podzielne przez 10
c. $n \cdot 7^n - 3n$ jest podzielne przez 4

Zad. 3. Niech $(x_n)_{n\ge 1}$ będzie ciągiem zdefiniowanym rekurencyjnie: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$. Udowodnij, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$x_{m+n} = \frac{2 + x_m x_n}{x_m + x_n}$$

Zad. 4. Niech $(x_n)_{n\ge 1}$ będzie ciągiem zdefiniowanym rekurencyjnie: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$2x_{2n} = \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n}$$

Zad. 5. Dowiedź, że liczby Fibonacciego, zdefiniowane rekurencją $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ spełniają równość

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

gdzie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Zad. 6. Znajdź kresy podanych zbiorów. Odpowiedzi uzasadnij.
a. $\{\frac{n-10}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+\}$
b. $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$

c. $\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x+4|}{|x+2|} < x\}$
d. $\{x + \frac{1}{2x} : x \in]a, b[\}$, $0 < a < b$ (rozpatrz różne możliwe przypadki)
e. $\{\sin \frac{1}{x} : x \in]0, a[\}$, $a > 0$
f. $\{x > 0 : \sin x = \frac{\pi}{2x}\}$
g. $\{x - 5\lfloor \frac{x}{5} \rfloor : x \in \mathbb{R}\}$
h. $\{n - 5\lfloor \frac{n}{5} \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$

Zad.7. Oblicz granice podanych ciągów:
a. $\frac{25^n+7}{3 \cdot 5^{2n}+4}$
b. $\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n-\sqrt[3]{n^2+8}}$
c. $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+2}}$
d. $\sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1}$
e. $\sqrt[n]{n^{100}+n^{99}+1}$
f. $\sqrt[2n]{3^n+4^n}$
g. $\frac{1}{2n}\cos(n^3) - \frac{3n}{6n+1}$
h. $\frac{n!}{1+2^n+3^n+6^n}$
i. $\frac{\log_2(n^5)}{\log_8 n}$
j. $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
k. $\left(\frac{n^2}{n^2+6}\right)^{n^2}$
l. $\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3}$
m. $n \cdot \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$
n. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n^2+k}}$
o. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}$
p. $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$
q. $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$
r. $\frac{1}{n}\sqrt[10]{\sum_{k=1}^n k^9}$

Zad. 8. Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

a. $x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$, $x_1 \in]-1, 2[$

b. $x_{n+1} = \frac{x_n-2}{x_n-1}$, $x_1 > 1$

c. $x_{n+1} = \frac{3x_n+1}{5x_n-1}$, $x_1 > \frac{1}{5}$

d. $x_{n+1} = \sqrt{2-x_n}$, $x_1 = 0$

e*. $x_{n+1} = \frac{10}{1+x_n^2}$, $x_1 \in \mathbb{R}$. Wskazówka: ciąg ten nie jest zbieżny. Rozważyć rekurencję spełnioną przez ciąg $a_n = x_n - 2$.

Zad. 9. Wykazać, że odwrozowanie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, f(x,y) := (x+y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$ jest bijektywne, wyliczyć f^{-1}.

Zad. 10. Czy podana relacja jest relacją równoważności? Opisać klasy równoważności tej relacji.

$$\mathcal{R} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \ (x-y)10^n \in \mathbb{Z}$$

Zad. 11. Opisać poziomice i zbiór wartości odwzorowania:

a. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) := E\left(\frac{2n-1}{3}\right)$,

b. $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (t + t^{-1}, t - t^{-1})$,

Zad 12. Sprawdzić, że relacja $x \sim y \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) = 0$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R}$. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $S \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Znaleźć funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której poziomice są klasami równoważnści tej relacji.