Noworoczna seria zadań z Algebry IR

1. grudnia 2014 r.

Notacja: We wszystkich poniższych zadaniach $\mathbb{K}$ jest ciałem, V zaś jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$.

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{R}_{>0}$ liczb rzeczywistych dodatnich z działaniem grupowym

$$\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \ : \ (x, y) \longmapsto x \cdot y =: x +_{\mathbb{R}_{>0}} y$$

oraz działaniem ciała $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \ : \ (\lambda, x) \longmapsto x^{\lambda} =: \lambda \triangleright x$$

jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Jaki jest wymiar tej przestrzeni?

Zadanie 2. Niechaj $V := \mathbb{R}_4[t]$ (wielomiany stopnia ≤ 4 o współczynnikach z $\mathbb{R}$) i niech F_v będzie funkcją wielomianową stowarzyszoną z wielomianem $v \in V$. Pokaż, że podzbiór

$$W := \left\{ \ v \in V \quad | \quad F_v(-1) = F_v(1) \ \wedge \ F_v'(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + F_v'(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = 0 \ \right\}$$

jest podprzestrzenią $\mathbb{R}$-liniową V. Wskaż dowolną bazę i oblicz wymiar $\mathbb{R}$-liniowy przestrzeni W.

Zadanie 3. Dane są liniowo niezależne wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Oznaczmy

$$s := v_1 +_V v_2 +_V \ldots +_V v_n$$

i zdefiniujmy wektory

$$e_k := v_k +_V (-\lambda_k) \triangleright s \equiv v_k - \lambda_k \triangleright s\,, \qquad k \in \overline{1, n}\,.$$

Wykaż, co następuje:

(i) Wektory $e_1, e_2, \ldots, e_n$ są liniowo niezależne. $\iff$ $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 1$.

(ii) Jeśli $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, to $\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k \triangleright e_k = 0_V \iff \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n \right)$, każdy układ $n-1$ wektorów spośród $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jest liniowo zależny oraz

$$\langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle_{\mathbb{K}} = \left\{ \ v = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \triangleright v_k \quad | \quad (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n \ \wedge \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \mu_k = 0_{\mathbb{K}} \ \right\}.$$

Zadanie 4. Niechaj $n, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Podprzestrzenie $\mathbb{K}$-liniowe $V_1, V_2 \subset \mathbb{K}^n$ są dane w postaci

$$V_1 := \ker A\,, \qquad\qquad V_2 := \operatorname{im} B\,,$$

gdzie $A \in \mathbb{K}^p{}_n$ i $B \in \mathbb{K}^n{}_q$. Dowiedź, że

(i) $V_1 = V_2 \iff (\ A \cdot B = \mathbf{0}_{p\times q}\ \wedge\ \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B = n\ )$;

(ii) $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus V_2 \iff (\ \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = \operatorname{rk}(A \cdot B)\ )$.

Zadanie 5. Czy wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ są zawsze liniowo niezależne, jeśli

(i) wektory $v_2, v_3, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne i wektory $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ są liniowo niezależne;

(ii) po odrzuceniu dowolnego z wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pozostałe wektory są liniowo niezależne;

(iii) wektory $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ są liniowo niezależne oraz $v_n \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\rangle_{\mathbb{K}}$?

Zadanie 6. Udowodnij poniższe zdania:

(i) Dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, v_3 \in V$ oraz skalarów $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ wektory $\lambda_2 \triangleright v_1 - \lambda_1 \triangleright v_2, \lambda_3 \triangleright v_2 - \lambda_2 \triangleright v_3, \lambda_1 \triangleright v_3 - \lambda_3 \triangleright v_1$ są liniowo zależne.

(ii) Dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in V$ oraz skalarów $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{K}$ wektory $\lambda_k \triangleright v_k - \lambda_{k+1} \triangleright v_{k+2}$, $k \in \overline{1,5}$, zapisane w konwencji $v_6 := v_1, v_7 := v_2, \lambda_6 := \lambda_1$, są liniowo zależne.

Zadanie 7. Niechaj $X := \{1, p, q\} \subset \mathbb{K}$ (przy czym $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$) i rozważmy funkcje wielomianowe $f_k := F_{t^k}$, $k \in \{0, 2, 3\}$ stowarzyszone z jednomianami $t^0, t^2, t^3 \in \mathbb{K}_3[t]$. Sprawdź, co następuje:

(i) Jeśli $p = 0_{\mathbb{K}}$ i $q \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}$, to funkcje f_0, f_2, f_3 tworzą układ liniowo niezależny nad $\mathbb{K}$ w $\mathbb{K}^X$ (funkcje $X \longrightarrow \mathbb{K}$).

(ii) Jeśli $p = 1_{\mathbb{K}} +_{\mathbb{K}} 1_{\mathbb{K}} =: 2_{\mathbb{K}}$, to istnieje dokładnie jeden skalar $q \in \mathbb{K} \setminus \{1_{\mathbb{K}}, 2_{\mathbb{K}}\}$, dla którego funkcje f_0, f_2, f_3 tworzą układ liniowo niezależny nad $\mathbb{K}$ w $\mathbb{K}^X$.

Zadanie 8. Niechaj układ wektorów $\{e_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ będzie bazą przestrzeni V i wprowadźmy oznaczenia

$$V_0 := \{0_V\}\,, \qquad\qquad V_k := \langle e_1, e_2, \ldots, e_k\rangle_{\mathbb{K}}\,, \quad k \in \overline{1,n}\,.$$

Wykaż, co następuje:

(i) Jeśli $f_k \in V_k \setminus V_{k-1}$ dla $k \in \overline{1,n}$, to układ wektorów $\{f_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ też jest bazą V.

(ii) Jeśli układ $\{f_k\}_{k\in\overline{1,n}}$ jest (inną) bazą V, o własności $f_k \in V_k$, to także $e_k \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle_{\mathbb{K}}$ dla $k \in \overline{1,n}$, a stąd $\langle e_1, e_2, \ldots, e_k\rangle_{\mathbb{K}} = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle_{\mathbb{K}}$.

Zadanie 9. Sprawdź, że dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zachodzi tożsamość

$$\langle v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_n - v_{n-1}\rangle_{\mathbb{K}} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \triangleright v_k \quad \middle| \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ \wedge\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} \right\}.$$

Zadanie 10. Wykaż, że jeśli każdy z trzech danych wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ spełnia warunek „Suma każdej trójki kolejnych współrzędnych jest równa 0.”, to te trzy wektory są liniowo zależne.

Zadanie 11. Nazwijmy **stopniem** niezerowego wektora $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{K}^n$ liczbę

$$\deg x := \max\{\ k \in \overline{1,n} \quad | \quad x^k \neq 0_{\mathbb{K}}\ \}.$$

Udowodnij, że każdy układ wektorów z $\mathbb{K}^n \setminus \{(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}})\}$ o parami różnych stopniach jest liniowo niezależny.

Zadanie 12. Niechaj $V := \mathbb{K}_4[t]$. Określmy podprzestrzenie

$$V_1 \ := \ \{\ v \in V \quad | \quad F_v(-2) = 0_{\mathbb{K}} = F_v(2)\ \},$$

$$V_2 \ := \ \{\ v \in V \quad | \quad F_v(-1) = 0_{\mathbb{K}} = F_v(1) = F_v(0_{\mathbb{K}})\ \}.$$

Sprawdź, że $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = 3 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 + 1$ i wskaż przykłady baz tych podprzestrzeni. Wykaż ponadto, że $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$ oraz $V_1 +_V V_2 = V$, a następnie znajdź rozkład wektora $v := c_0 \triangleright t^0 +_V c_1 \triangleright t^1 +_V c_2 \triangleright t^2 +_V c_3 \triangleright t^3 +_V c_4 \triangleright t^4 \in V$ na składowe $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$.

Zadanie 13. Podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset V := \mathbb{R}^4$ są określone wzorami $V_1 := \ker A$ i $V_2 := \operatorname{im} A$, gdzie

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Znajdź

(i) takie bazy V_1 i V_2, których część wspólna jest bazą $V_1 \cap V_2$;

(ii) układ równań opisujący $V_1 +_V V_2$.

Powtórz rachunki dla $V_1 := \langle B^{\bullet}{}_1, B^{\bullet}{}_3\rangle_{\mathbb{R}}$ i $V_2 := \langle B^{\bullet}{}_2, B^{\bullet}{}_4\rangle_{\mathbb{R}}$, gdzie

$$B := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 14. Sprawdź, czy $\mathbb{R}^3$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_1 := \ker \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ i $V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$. W przypadku uzyskania odpowiedzi twierdzącej podaj rozkład wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na składowe z V_1 i V_2.

Zadanie 15. Wykaż, że $\mathbb{R}^2{}_2$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni

$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

oraz

$$V_2 := \left\{ A \in \mathbb{R}^2{}_2 \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \right\}.$$

Znajdź rozkład wektora $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ na składowe z tych podprzestrzeni.

Zadanie 16. Niechaj V będzie sumą prostą swoich dwóch podprzestrzeni V_1, V_2, tj. $V = V_1 \oplus V_2$, i niech $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ dla pewnej przestrzeni wektorowej W nad $\mathbb{K}$. Oznaczmy $K := \ker L$. Potwierdź słuszność poniższej równoważności:

$$L(V_1) \cap L(V_2) = \{0_V\} \iff K = K \cap V_1 + K \cap V_2\,.$$

Zadanie 17. Wyznacz rząd macierzy

$$D_4 := \begin{pmatrix} a_1 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_1 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_1 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_1 +_{\mathbb{K}} b_4 \\ a_2 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_2 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_2 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_2 +_{\mathbb{K}} b_4 \\ a_3 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_3 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_3 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_3 +_{\mathbb{K}} b_4 \\ a_4 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_4 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_4 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_4 +_{\mathbb{K}} b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4{}_4\,,$$

a następnie uogólnij ten wynik na przypadek macierzy $D_n \in \mathbb{K}^n{}_n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ zdefiniowanej analogicznie.

Zadanie 18. Znajdź podprzestrzeń V_1 przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dopełniającą względem podprzestrzeni $V_2 := \ker(3, -2, 1, 2)$, tj. taką, która spełnia równość $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

Zadanie 19. Wyznacz metodą operacji elementarnych odwrotność macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 20. W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ ustal zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} -1 & 1+p & 1+p \\ -p & 3+p & 2 \\ 1 & 2 & 3+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 21. Jaki warunek muszą spełniać parametry $a, b \in \mathbb{R}$, aby układ równań

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

był niesprzeczny? Rozwiąż ten układ dla $a = -1 = b$.

Zadanie 22. W zależności od wartości parametrów $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (\lambda+3)x + y + 2z = a\lambda + b \\ \lambda x + (\lambda-1)y + z = b(\lambda-1) \\ 3(\lambda+1)x + \lambda x + (\lambda+3)z = (a+b)\lambda \end{cases}.$$

Zadanie 23. Niechaj V_1, V_2 będą podprzestrzeniami $\mathbb{K}$-liniowymi przestrzeni V. Skonstruuj izomorfizm przestrzeni wektorowych

$$V_1/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1 +_V V_2)/V_2 .$$

Zadanie 24. Niechaj V_1, V_2 będą podprzestrzeniami $\mathbb{K}$-liniowymi przestrzeni V i niech $\pi_k : V \to V/V_k$, $k \in \{1, 2\}$ będą rzutami kanonicznymi. Rozważmy odwzorowanie

$$\pi := \pi_1 \times \pi_2 \;:\; V \longrightarrow (V/V_1) \times (V/V_2) \;:\; v \longmapsto (\pi_1(v), \pi_2(v)) ,$$

$\mathbb{K}$-liniowe względem naturalnej (iloczynowej) struktury $\mathbb{K}$-liniowej na jego przeciwdziedzinie. Udowodnij, co następuje:

(i) π jest monomorfizmem $\iff$ $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$;

(ii) π jest epimorfizmem $\iff$ $V = V_1 + V_2$;

(iii) π jest izomorfizmem $\iff$ $V = V_1 \oplus V_2$.

Zadanie 25. Sprawdź liniową niezależność układów form liniowych na $\mathbb{R}^5$ złożonych z poniższych elementów:

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \,, \\
\varphi_2 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \,, \\
\varphi_3 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 - x_2 \,;
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + x_5 \,, \\
\varphi_2 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \,, \\
\varphi_3 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto 12x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 9x_5 \,, \\
\varphi_4 &: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto 10x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 \,;
\end{aligned}$$

Zadanie 26. Wyznacz bazę przestrzeni $(\mathbb{R}^4)^*$ form liniowych na przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$ dwoistą względem bazy $\mathbb{R}^4$ złożonej z wektorów

$$e_1 := (1, 0, 0, 0) \,, \qquad e_2 := (1, 1, 0, 0) \,, \qquad e_3 := (1, 1, 1, 0) \,, \qquad e_1 := (1, 1, 1, 1) \,.$$

Wypisz macierz przejścia między tak określoną bazą $(\mathbb{R}^4)^*$ a bazą standardową utworzoną przez rzuty kanoniczne na składowe wektora.

Zadanie 27. Określmy, dla ustalonej formy liniowej $\varphi \in V^*$, podzbiór $H_\varphi := \varphi^{-1}(\{1_{\mathbb{K}}\}) \subset V$. Udowodnij prawdziwość implikacji

$$\forall_{\varphi, \psi \in V^*} \; : \; \left(\; H_\varphi = H_\psi \implies \varphi = \psi \; \right) \,.$$

Zadanie 28. Niechaj $V_1 := \mathbb{R}_2[t]$, $V_2 := \mathbb{R}^2{}_2$ i niech $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Określmy operator $\mathbb{R}$-liniowy $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2)$ wzorem

$$L \; : \; V_1 \longrightarrow V_2 \; : \; a_0 \triangleright_{V_1} t^0 + a_1 \triangleright_{V_1} t^1 + a_2 \triangleright_{V_1} t^2 \longmapsto a_0 \triangleright_{V_2} \mathbf{1}_{2\times 2} + a_1 \triangleright_{V_2} A + a_2 \triangleright_{V_2} A^2 \,.$$

Znajdź

(i) bazę $\ker L$;

(ii) równania spełniane przez wyrazy $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ macierzy $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{im} L$;

(iii) macierz $[L]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1}$ operatora L względem baz $\mathscr{B}_1 := \{e_1 := t^0, e_2 := t^1, e_3 := t^2\} \subset V_1$ (baza jednomianowa) oraz

$$\mathscr{B}_2 := \left\{ f_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, f_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, f_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, f_4 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dokonaj transformacji macierzy uzyskanej w punkcie (iii) do „bazy Pauliego”

$$\mathscr{B}'_2 := \left\{ f'_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f'_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f'_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, f'_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 29. Odwzorowanie liniowe $L \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[t])$ zadane jest wzorem

$$w \longmapsto (t+1)w' =: L(w),$$

w którym w' oznacza wielomian o funkcji wielomianowej będącej pochodną w. Wyznacz macierz L w bazie jednomianowej $\mathbb{R}_n[t]$, a następnie – $\ker L, \operatorname{im} L$ oraz $\operatorname{rk} L$. Czy odwzorowanie to jest odwracalne?

Zadanie 30. Niechaj V_n będzie podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej) złożoną z funkcji postaci $L(w) : x \mapsto F_w(\sin x, \cos x)$, zapisanych w terminach funkcji wielomianowej F_w stowarzyszonej z wielomianem $w \in \mathbb{R}_n[s,t]$ stopnia (całkowitego) co najwyżej n w *dwóch* zmiennych. Ustal wymiar $\mathbb{R}$-liniowy V_n. Wybierz (dowolnie) bazę $\mathscr{B}_1$ w $\mathbb{R}_n[s,t]$ oraz bazę $\mathscr{B}_2$ w V_n. Wyznacz macierz $[L]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1}$ względem tych baz odwzorowania liniowego

$$L \ : \ \mathbb{R}_n[s,t] \longrightarrow V_n \ : \ w \longmapsto L(w),$$

a nadto – macierz $[D]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_2}$ operatora pochodnej $D \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V_n)$.

Zadanie 31. Niechaj $\mathbf{0}$ oznacza trywialną przestrzeń wektorową nad $\mathbb{K}$. Rozważmy **krótki ciąg dokładny** przestrzeni wektorowych:

$$\mathbf{0} \longrightarrow V_1 \xrightarrow{L_1} V_2 \xrightarrow{L_2} V_3 \longrightarrow \mathbf{0},$$

tj. kolekcję przestrzeni wektorowych $\mathbf{0}, V_1, V_2, V_3$ nad $\mathbb{K}$ wraz z odwzorowaniami $\mathbb{K}$-liniowymi między nimi oznaczonymi strzałkami na powyższym diagramie, o tej własności, że dla każdej pary sąsiednich odwzorowań jądro następnika pokrywa się z obrazem poprzednika, np. $\ker L_2 = \operatorname{im} L_1$. (Co nam to mówi o L_1 i L_2?)

Udowodnij, że ciąg powyższy **rozszczepia się**, tj. spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

(R) Istnieje epimorfizm $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2, V_1)$ o własności $\rho \circ L_1 = \mathrm{id}_{V_1}$. Odwzorowanie to nazywamy **retrakcją liniową stowarzyszoną z** L_1.

(C) Istnieje monomorfizm $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_3, V_2)$ o własności $L_2 \circ \sigma = \mathrm{id}_{V_3}$. Odwzorowanie to nazywamy **cięciem liniowym stowarzyszonym z** L_2.

Wykaż słuszność następujących stwierdzeń:

(i) Istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni wektorowych $V_2 \cong V_1 \oplus V_3$ (zewnętrzna suma prosta!).

(ii) Diagram

$$\mathbf{0} \longleftarrow V_1 \xleftarrow{\rho} V_2 \xleftarrow{\sigma} V_3 \longleftarrow \mathbf{0}$$

określa krótki ciąg dokładny przestrzeni wektorowych.

Szampańskiego Sylwestra i dobrego Nowego Roku!