10.05.2018

Seria 5
ZADANIA NA EKSTREMA FUNKCJI UWIKŁANYCH

Zadanie 1. Znaleźć ekstrema funkcji $y = y(x)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y) = y^4 - 8xy - 4y + 8x^2 = 0.$$

Zadanie 2. Znaleźć ekstrema funkcji $y = y(x)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y) = x^2 - 2x - 2y + y^2 + 1 = 0.$$

Otrzymać odpowiedź korzystając z metody funkcji uwikłanej i sprawdzić poprawność rozwikłnując jawnie $F(x, y) = 0$ względem y.

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema funkcji $y = y(x)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0.$$

Czy znalezione ekstrema są ekstremami tej samej funkcji $y = y(x)$, czy też dwu różnych funkcji $y = y_1(x)$ i$y = y_2(x)$?

Zadanie 4. Znaleźć ekstrema funkcji $y = y(x)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y) = x^5 + y^4 - 4xy^2 = 0.$$

Zadanie 5. Znaleźć ekstrema funkcji $z = z(x, y)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0.$$

Zadanie 6. Znaleźć ekstrema funkcji $z = z(x, y)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y, z) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0.$$

Zadanie 7. Znaleźć ekstrema funkcji $z = z(x, y)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y, z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0.$$

Zadanie 8. Znaleźć ekstrema funkcji $z = z(x, y)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y, z) = 2(x^3 + y^3)z^3 - 3(x^2 - y^2)z^2 + z - 1 = 0.$$

Zadanie 9. Znaleźć ekstrema funkcji $z = z(x, y)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem

$$F(x, y, z) = z^3 + z + \frac{28xz}{x^2 + 4} - 9 - (x + y)^2 = 0.$$

Zadanie 10. Znaleźć pochodną funkcji $z = z(x)$, $y = y(x)$ zadanej w sposób uwikłany wzorami

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0,\ G(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 18 = 0,$$

w punkcie o współrzędnych $(1, 2, 1)$.

Odpowiedzi

1: Ekstrema są w punkcie $x = 0$ i wtedy $y = 0$ jest lokalnym maksimum tej gałęzi oraz w $x = 1$ i wtedy $y = 2$ jest lokalnym minimum odpowiedniej gałęzi.

2: Ekstrema są w punkcie $x = 1$, któremu odpowiadają $y = 0$ i $y = 2$ (dwie gałęzie funkcji uwikłanej). Gałąź $y(1) = 0$ ma w $x = 1$ minimum lokalne, a gałąź $y(1) = 2$ ma w $x = 1$ maksimum.

3: Ekstrema są w punkcie $x = -3$ i wtedy $y = -2$ jest lokalnym minimum tej gałęzi oraz w $x = -1$ i wtedy $y = 0$ jest lokalnym maksimum odpowiedniej gałęzi.

4: Jest tylko jedno ekstremum w $x = -1/16$, któremu odpowiada $y = 1/16$. Druga gałąź funkcji nie ma ekstremów lokalnych.

5: Ekstrema są w punkcie $x = 4$, któremu odpowiadają $y = 1$ i $y = 3$ (dwie gałęzie funkcji uwikłanej). Gałąź $y(4) = 1$ ma w $x = 4$ minimum lokalne, a gałąź $y(4) = 3$ ma w $x = 4$ maksimum.

6: Punktami podejrzanymi o ekstremum (tj. tymi, w których $F_x = 0$) są punkty $(0, 0)$ oraz $((64/25)^{1/3}, (5/2)^{1/2}(64/25)^{2/3})$. W punkcie $(0, 0)$ znika jednak F_y więc tam $y(x)$ nie istnieje. W drugim punkcie funkcja (jedna z jej czterech gałęzi) ma maksimum lokalne.

7: Punktami podejrzanymi o ekstremum (tj. tymi, w których $F_x = 0$) są punkty $(0, 0)$ oraz $(-1, 1)$. W punkcie $(0, 0)$ znika jednak F_y więc tam $y(x)$ nie istnieje. W drugim punkcie funkcja ma maksimum lokalne.

8: Punktami podejrzanymi o ekstremum (tj. tymi, w których $F_x = 0$) są punkty $(0, 0)$ oraz $(2^{7/3}, 2^{8/3})$. W punkcie $(0, 0)$ znika jednak F_y więc tam $y(x)$ nie istnieje. W drugim punkcie funkcja ma maksimum lokalne.

9: Ekstrema są w punkcie $(x, y) = (1, 1)$, któremu odpowiadają wartości $z = 0$ (minimum lokalne) i $z = 2$ (maksimum lokalne).

10: Ekstrema dwu różnych "gałęzi" funkcji $z(x, y)$ są w punkcie $(x, y) = (-1/3,\ 2/3)$, któremu odpowiadają wartości $z = 2/3 - 1/\sqrt{6}$ (minimum lokalne) i $z = 2/3 + 1/\sqrt{6}$ (maksimum lokalne).

11: Ekstrema są w punktach: $x = -6$, $y = -6\sqrt{3}$, gdzie $z = -12\sqrt{3}$ jest lokalnym maksimum oraz w $x = -6$, $y = +6\sqrt{3}$, gdzie $z = +12\sqrt{3}$ jest lokalnym minimum.

12: Punktami krytycznymi są (xy, z): $(0, 0, 1)$ - punkt siodłowy (macierz drugich pochodnych nieokreślona), $(\frac{1}{2}, 0, 2)$ - maksimum lokalne, $(1, -1, 1)$ znowu punkt siodłowy.