Zagadnienia egzaminacyjne z Analizy IV
semestr letni 2012/2013

I. Elementy teorii miary i całki

- Przestrzenie mierzalne (X, Σ) - przykłady σ-algebr zbiorów, funkcje mierzalne.
- Miara i jej własności (ciągłość miary), przestrzenie z miarą (X, Σ, μ), zbiory miary 0, własności zachodzące μ-prawie wszędzie, miary zupełne; miary skończone i półskończone.
- Funkcje całkowalne, przestrzenie $L^1(X, \Sigma, \mu)$. Procedura Lebesque'a: funkcje numeryczne, funkcje proste, całka funkcji dodatnich, tw.Lebesque'a o zbieżności monotonicznej; zupełność przestrzeni funkcji całkowalnych, całkowanie na podzbiorach mierzalnych.
- Twierdzenie Lebesque'a o zbieżności majoryzowanej i jego zastosowania - przykłady (całki z parametrem).
- Przestrzenie produktowe $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ - twierdzenie Fubiniego-Tonelliego.
- Przestrzenie $L^p(X, \mu)$ jako przestrzenie Banacha - nierówności Minkowskiego i Höldera, przestrzeń Hilberta $L^2(X, \mu)$.
- Miara Lebesque'a na $\mathbf{R}^N$:
  - przestrzeń Euklidesowa $\mathbf{E}^N = (\mathbf{R}^N, (\cdot|\cdot))$, objętość prostopadłościanu, miara zewnętrzna zboru i jej własności, rodzina zbiorów mierzalnych Σ_N, miara Lebesqu'a μ_L, (E^N, Σ_N, μ_L) jako przestrzeń z miarą (istnienie zbiorów nie-mierzalnych, regularność miary Lebesqu'a), funkcje całkowalne w sensie Lebesque'a;
  - związek całki Lebesque'a z caką Riemanna;
  - twierdzenie Fubiniego;
  - twierdzenie o zamianie zmiennych dla całki Lebesque'a.

II. Transformacja Fouriera

- Przestrzeń $L^1(\mathbf{R}^N, d^N x)$ jako algebra splotowa, transformacja Fouriera funkcji z $L^1(\mathbf{R}^N, d^N x)$ i jej własności, lemat Riemanna-Lebesque'a.
- Przestrzeń funkcji Schwartza $\mathcal{S}_N := \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ i jej topologia, $\mathcal{S}_N$ jako bialgebra (mnożenie punktowe funkcji lub splot funkcji), gęstość $\mathcal{S}_N$ w $L^p(\mathbf{R}^N, d^N x)$ $(1 \leqslant p < \infty)$; - Transformacja Fouriera na $\mathcal{S}_N$ i jej własności - izomorfizm topologiczny (algebr), wzór na transformację odwrotną, przykłady;
- Transformacja Fouriera jako operator unitarny na $L^2(\mathbf{R}^N, d^N x)$ (twierdzenie Plancherela).

III. Elementy teorii dystrybucji

- Funkcje dowolnie różniczkowalne o zwartych nośnikach na podzbiorach otwartych w $\mathbf{R}^N$ - przykłady, przestrzeń $C_0^\infty(\Omega)$ i jej topologia (zbieżność) - przestrzeń "funkcji próbnych" $\mathcal{D}(\Omega)$, półnormy.
- Funkcjonały liniowe ciągłe na $\mathcal{D}(\Omega)$ - dystrybucje, przykłady dystrybucji, dystrybucje regularne i nieregularne, przestrzeń dystrybucji $\mathcal{D}(\Omega)'$ i jej topologia (zbieżność), operacje na dystrybucjach (różniczkowalność, mnożenie przez funkcje klasy C^∞), nośnik dystrybucji, dystrybucje o zwartych nośnikach, równania dystrybucyjne w $\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$: ogólne rozwiązanie równania $x^n T = 0$ iloczyn tensorowy dystrybucji.
- Funkcjonały liniowe ciągłe na $\mathcal{S}_N$ - przestrzeń $\mathcal{S}'_N$ (dystrybucje temperowane);
- Transformacja Fouriera na $\mathcal{S}'_N$ i jej własności.
- Transformata Fouriera dystrybucji o zwartych nośnikach: wzór

$$\widehat{T}(p) = < T(x), e^{-2\pi i (p|x)} >,$$

  reprezentacja przez funkcję klasy C^∞.
- Splot dystrybucji - problem istnienia, warunki dostateczne, własności splotu, jedność splotowa;
- Transformata Fouriera splotu - sens wzoru $\widehat{S \star T}(p) = \widehat{S}(p)\,\widehat{T}(p)$;
- Rozwiązania podstawowe równań różniczkowych - przykłady, zastosowanie do operatorów różniczkowych o stałych współczynnikach.

IV. Liniowe równania różniczkowe cząstkowe

- Liniowe równania różniczkowe cząstkowe 2-go rzędu, klasyfikacja równań w punkcie (związek z klasyfikacją form kwadratowych), zagadnienia graniczne (zagadnienie Cauchy'ego, zagadnienia brzegowe);
- ważne równania fizyki matematycznej, rozwiązania podstawowe:
  - równania falowe (struna drgająca w $\mathbf{R}^1$ - rozwiązanie d'Alemberta),
  - równania typu dyfuzji, równanie przewodnictwa cieplnego
  - równania stacjonarne - równania Poissona i Laplace'a (zagadnienie Dirichleta dla koła).

V. Wielomiany ortogonalne

- Elementy geometrii przestrzeni Hilberta - twierdzenie o rzucie ortogonalnym, postać funkcjonału liniowego.
- Ortogonalizacja Schmidta, przykłady procedury: wielomiany Hermite'a, Legendre'a i ich własności (wzory rekurencyjne, równania różniczkowe),
- Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą szeregów potęgowych (metoda Fouriera);
- Funkcje Bessela i równanie Bessela.

Literatura uzupełniająca:

1. K.Maurin - *Analiza* cz.I
2. K.Maurin - *Analiza* cz.II
3. W.Rudin - *Analiza rzeczywista i zespolona*
4. R.Sikorski - *Rachunek różniczkowy i całkowy.* Funkcje wielu zmiennych
5. V.S.Vladimirov - *Methods of the theory of generalized functions*

Wiesław Pusz
Warszawa, w maju 2013