TEORIA DYSTRYBUCJI & TRANSFORMATA FOURIERA

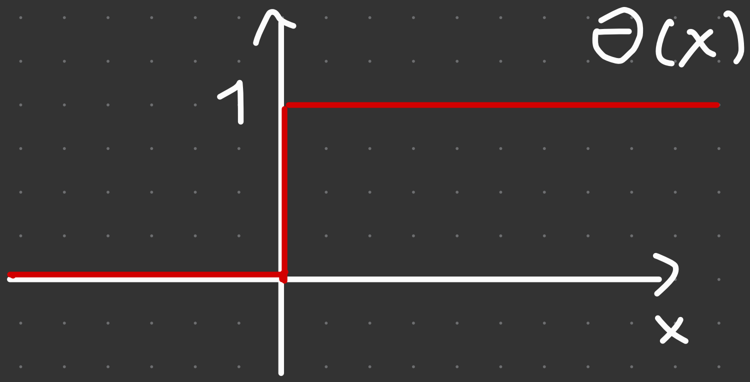
Przykład, który "prowadzi" do teorii dystrybucji, delty Diraca...

Przypomnijmy wzór na całkowanie przez części

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

i jeśli $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot g(x) = 0$ to $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)\,dx \overset{(*)}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g'(x)\,dx$

Niech $\Theta(x)$ będzie funkcją schodkową, znaną także jako funkcja Heaviside'a



- Θ jest nieciągła w $x=0$
- dla $x \neq 0$ $\Theta'(x) = 0$.
- Θ nie jest różniczkowalna w $x=0$.

Podstawienie $f = \Theta$ do całki przez części daje "formalny napis"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta'(x) \cdot g(x) \overset{(**)}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x) \cdot g'(x).$$

Zauważmy, że $-\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)\, g'(x) = -\int_0^{\infty} g'(x)\, dx = -\, g(x)\Big|_0^{\infty}$

$= g(0) - g(\infty) = g(0).$

(**) można zapisać w postaci:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta'(x)\, g(x)\, dx \overset{(3)}{=} g(0).$$

równość zachodzi dla wszystkich funkcji g znikających w ∞.

Wprowadźmy oznaczenie $\Theta'(x) = \delta(x)$

Wzór (3) ma postać

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot g(x)\, dx = g(0)$$

Definicja Delty Diraca:

Delta Diraca nazywamy funkcję $\delta(x)$, taką że dla wszystkich funkcji ciągłych $g(x)$ takich, że $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$ zachodzi wzór $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) g(x) = g(0)$

Taka funkcja nie istnieje, "gdyż" $\theta(x)$

nie jest różniczkowalna w $x=0$".

Mimo to obliczmy pochodną delty Diraca

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\cdot g(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\cdot g'(x)\,dx = -g'(0).$$

Zatem jeśli funkcje testowe $g(x)$ są gładkie to mamy wzór definiujący $\delta'(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\cdot g(x)\,dx = -g'(0)$$ dla wszystkich funkcji próbnych $g(x)$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{próbne} \\ \parallel \\ \text{testowe} \end{array} \right.$

Lub równoważnie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta''(x)\, g(x) = -g'(0).$$

Θ' i Θ'' (czyli δ i δ') nie są funkcjami

Czym w takim razie są napisy δ i δ'?

Jak je porządnie zdefiniować?

Niech V będzie przestrzenią (zbiorem) wszystkich funkcji próbnych.

V jest p-nią wektorową:

jeśli g_1, g_2 są funkcjami próbnymi

oraz α_1, α_2 są skalarami to funkcje $h(x) = \alpha_1 \cdot g_1(x) + \alpha_2 \cdot g_2(x)$ jest funkcją próbną. (jest gładka i szybko znika w ∞).

Def Delta Diraca to odwzorowanie liniowe z przestrzeni wektorowej V w ciało liczb rzeczywistych

$$\delta : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nośnik $g \overset{\text{ozn}}{=} \operatorname{supp}(g)$

$$\operatorname{supp}(g) = \overline{\{x : g(x) \neq 0\}}$$

domknięcie

takie, że $\delta(g) = g(0)$ dla wszystkich $g \in V$.

Oznaczenia: $V = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ - p-ń funkcji próbnych czyli funkcji gładkich o zwartych nośnikach.

Def: Dystrybucją nazywamy każde odwzorowanie liniowe $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, które jest ciągłe

↖ do wyjaśnienia / przedyskutowania.

Przykład Dystrybucje regularne

f - funkcja zmiennej rzeczywistej nie musi być ciągła i nie musi być całkowalna na $\mathbb{R}$, czyli całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ niekoniecznie jest zbieżna. Wystarczy, że f jest lokalnie całkowalna (na każdym odcinku). Zdefiniujmy dystrybucję

$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$T_f(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(x)\,dx$$ dla wszystkich

funkcji próbnych $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

T_f nazywamy dystrybucją regularną zadaną przez funkcję f

Uwaga: Całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x)\,dx$ jest zbieżna bo funkcja próbna g ma zwarty nośnik.

Przykład: $T_{\log|x|}$ jest dystrybucją regularną bo $\log|x|$ jest lokalnie całkowalna. Na przykład

$$\int_0^{\varepsilon} \log(x)\, dx = x(\log(x) - 1)\Big|_0^{\varepsilon} = \varepsilon \log(\varepsilon) < \infty$$

Uwaga: Dystrybucja $T_{\frac{1}{x}}$ nie jest dobrze określona bo $\frac{1}{x}$ nie jest lokalnie całkowalna.

Def: Pochodna dystrybucji

$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ nazywamy dystrybucją oznaczoną T' i zdefiniowaną wzorem

$$T'(g) = -T(g') \text{ dla wszystkich } g \text{ - próbnych}$$

Przykład Jeśli f jest funkcją gładką to

$$T_f'(g) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g'(x)\, dx =$$

$$= \cancel{-f(x) \cdot g(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) g(x)\, dx = T_{f'}(g)$$

zero bo nośnik g jest zwarty

Przykład: Pochodna $T_{\log|x|}$.

Niech $g(x)$ będzie funkcją próbną.

$$T'_{\log|x|}(g) \underset{\text{z def.}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} \log|x| \cdot g'(x) =$$

$$-\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\, g'(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \log(x) \cdot g'(x)\,dx \right)$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 := \int_{\varepsilon}^{\infty} \log(x)\, g'(x)\,dx &= \log(x)\, g(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\, g(x)\,dx \\ &= -\log(\varepsilon)\, g(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\, g(x)\,dx \end{aligned}\right\}$$

$$I_2 := \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x) g'(x) = \log(-x) g(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \cdot g(x) dx$$

$$= \log(\varepsilon) \cdot g(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \cdot g(x) dx$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -I_1 - I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} \cdot g(x) dx + \log(\varepsilon)(g(\varepsilon) - g(-\varepsilon)) \right)$$

Zauważmy, że

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \log(\varepsilon) (g(\varepsilon) - g(-\varepsilon)) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon \cdot \log(\varepsilon) \cdot \frac{g(\varepsilon) - g(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = g'(0) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon \log(\varepsilon) = 0$$

Zatem

$$T'_{\log|x|}(g) = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{g(x)}{x}\,dx}_{\text{granica istnieje}}$$

&

dystrybucje $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni g \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{g(x)}{x}\,dx \in \mathbb{R}$

nazywamy wartością główną $\frac{1}{x}$ i oznaczamy $P\left(\frac{1}{x}\right)$

$$T'_{\log|x|} = P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Omówimy teraz operację mnożenia dystrybucji $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ przez funkcję gładką $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, którą definiujemy wzorem:

$h \cdot T$ jest dystrybucją, taką że

$$(h \cdot T)(g) = T(h \cdot g) \quad (*)$$

Uwaga: jeśli g jest funkcją próbną oraz h jest funkcją gładką, to $h \cdot g$ jest funkcją próbną i wzór $(*)$ ma sens.

Przykład

1) f - lokalnie całkowalna & h - gładka.

$$T_f(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx \quad \&$$

$$(h\cdot T_f)(g) = T_f(h\cdot g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot h(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$= T_{h\cdot f}(g).$$

2) $$\left(x\cdot P\left(\frac{1}{x}\right)\right)(g) = P\left(\frac{1}{x}\right)(x\cdot g) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{1}{x}\cdot x\cdot g(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = T_1(g)$$

co zapisujemy wzorem

$x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = T_1$ lub w uproszczonej

notacji $x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

3 $h \cdot \delta = h(0) \cdot \delta$

$(h \cdot \delta)(g) = \delta(hg) = h(0)g(0) = \big(h(0)\delta\big)(g)$