TRANSFORMATA FOURIERA.

Definicja

Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją bezwzględnie całkowalną: $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$

Transformatą Fouriera funkcji f nazywamy funkcję $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ daną wzorem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i \xi \cdot x}$$

Przykład: transformata Fouriera funkcji schodkowej $\chi_{[0,1]}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \chi_{[0,1]} = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$

$$\hat{\chi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\, e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_0^1 e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{-2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi x} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{-2\pi \xi \cdot i} \left(e^{-2\pi i \xi} - 1 \right) = \frac{e^{-i\pi\xi}}{\pi \xi} \frac{\left(e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi} \right)}{2i}$$

$$= e^{-i\pi\xi} \cdot \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi \cdot \xi}$$

Zauważmy, że $\hat{\chi}(\xi)$ jest funkcją

- ciągła (także w $\xi = 0$)
- znikającą w ∞: $\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{x}(\xi) = 0$.

Uwaga/"kłopocik"

Transformata Fouriera funkcji próbnej $\overset{\circ}{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nie jest funkcją próbną: $\hat{g}$ ma nośnik niezwarty - więcej w temacie będzie później.

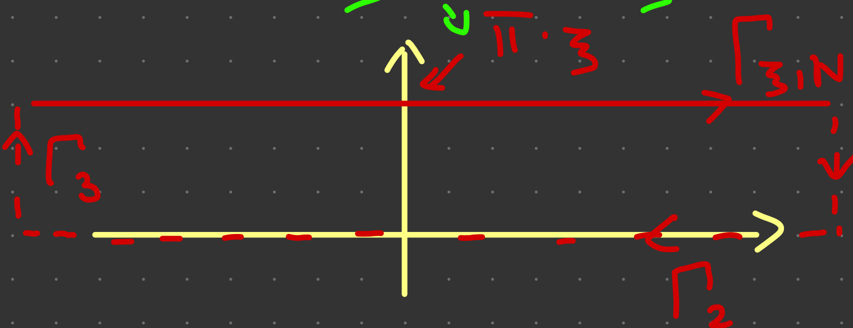
Przykład Transformata Fouriera funkcji Gaussa e^{-x^2}.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\pi\xi)^2} e^{-\pi^2\xi^2}\,dx$$

$$= e^{-\pi^2\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\pi\xi)^2}\,dx$$

$$= e^{-\pi^2\xi^2}\int_{\Gamma_\xi} e^{-z^2}\,dz \quad \text{gdzie } \Gamma_\xi = \{x+i\pi\xi : x\in\mathbb{R}\}$$

zał. że $\xi>0$ $\quad\Gamma_\xi$



domykamy kontur.

$$\Gamma_{\xi,N} = \{ x + i\pi\xi : -N \leq x \leq N \}$$

Tw. Cachy.

$$\int_{\Gamma_{\xi,N}} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz = 0.$$

$$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz = \{ z = N + i\pi(\xi - t) : t \in [0, \xi] \} =$$

$$= \int_0^\xi e^{-(N + i\pi(\xi - t))^2} d\, i\pi(\xi - t) =$$

$$- e^{-N^2} \int_0^\xi e^{-2Ni\pi(\xi - t)} e^{\pi(\xi - t)^2} i\pi \, dt \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Podobnie $\int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

Ponadto: $\int\limits_{\Gamma_2} e^{-z^2}dz \xrightarrow[N\to\infty]{} -\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$

Wniosek $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\pi\xi)^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

Obliczmy $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx =: I.$

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ dxdy = \varrho\, d\varrho\, d\varphi \end{array} \right\} = \int\limits_0^{\infty} \varrho\, d\varrho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-\varrho^2} =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho = -\pi e^{-\varrho^2} \Big|_0^\infty = \pi .$$

Zatem $I = \sqrt{\pi}$ oraz

Transformata Fouriera $e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 \xi^2}$

$$\widehat{e^{-x^2}}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 \xi^2}$$

Ogólniej jeśli $a > 0$ to

$$\widehat{e^{-ax^2}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2\pi i \xi x} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a}\, x = y \\ dx = \frac{dy}{\sqrt{a}} \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} e^{-2\pi i \frac{\xi}{\sqrt{a}} \cdot y} \frac{dy}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$$

Przy okazji zauważmy, że

$$\widehat{\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 x^2}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}}\, e^{-\frac{\pi^2}{\pi^2}\xi^2} = e^{-\xi^2}.$$

Uwaga notacyjna:

Czasami wygodniej jest pisać

$\mathcal{F}(g)$ zamiast $\hat{g}$

$\mathcal{F}(g)$ - transformata Fouriera g.

Zatem, skoro $\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 \xi^2}$

oraz $\mathcal{F}(\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 \xi^2}) = e^{-x^2}$ to

$$\mathcal{F}^2(g) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(e^{-x^2})) = e^{-x^2}$$

Uwaga notacyjna:

Przy funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ t. że

$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$ oznaczamy symb. $L^1(\mathbb{R})$

Zauważmy, że jeśli $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ to $g \in L^1(\mathbb{R})$.

czyli $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Pytanie $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}g \in$??

$f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}f \in$??

Na te pytania trudno odpowiedzieć

jest to trochę problematyczne z punktu widzenia odwrotnej transformaty Fouriera $\mathcal{F}^{-1}$.

Problemy te znikają jeśli wprowadzimy p-ń $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ funkcji typu Schwarza.

Okazuje się, że $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

oraz $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Przykładem funkcji Schwarza jest funkcja Gaussa e^{-ax^2} $a > 0$

Jak wykazaliśmy wcześniej

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Ogólniej, jeśli $w(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

to $w(x) e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definicja Mówimy, że funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ jest typu Shwarza jeśli

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} g(x) \right| < \infty.$$

Stwierdzenie

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

Dowód $\left.\begin{array}{l} g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ - gładka, zwarty} \\ \text{nośnik} \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$x^n \frac{d^m}{dx^m} g$ - jest gładka i ma zwarty nośnik.

Stąd wynika, że $\sup_{\mathbb{R}} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} g \right| < \infty$.

cyli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Drugie zawieranie: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

jeśli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ to $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \leq M_1$

oraz $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2 \cdot g(x)| \leq M_2$ istnieją takie stałe.

Zatem $\sup (1+x^2)|g(x)| \leq M_1 + M_2 =: M_3$

Skoro $|g(x)| \le \frac{M_3}{1+x^2}$ $\forall x$ &

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{M_3\,dx}{1+x^2} < \infty \text{ to } \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx < \infty \text{ i}$$

$$g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Stwierdzenie

Jeśli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ to $\hat{g}$ jest różniczkowalna oraz $\hat{g}'(\xi) = \widehat{-2\pi i x \cdot g}(\xi)$.

Dowód

$$\hat{g}'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \frac{d}{d\xi} e^{-2\pi i \xi x}\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x\, g(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \widehat{-2\pi i x \cdot g}(\xi)$$

Stwierdzenie

Jeśli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ to $\xi \cdot \hat{g}(\xi) = \widehat{\frac{1}{2\pi i} g'}(\xi)$

Dowód: $\xi \cdot \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \xi \cdot e^{-2\pi i x \xi}\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{d}{dx} \cdot \frac{i}{2\pi} e^{-2\pi i x \xi} \overset{\text{c. części}}{=\!=\!=} -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \widehat{g'}(\xi)$$

Wniosek: Jeśli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ to $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Rzeczywiście:

$$(*) \begin{cases} \xi^n \hat{g}(\xi) = \widehat{\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n g^{(n)}} \\ \frac{d^m}{d\xi^m} \hat{g}(\xi) = (-2\pi i)^m \widehat{x^m g(x)} \end{cases}$$

i wystarczy skorzystać z oczywistej

nierówności

(**) $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$ gdzie $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(*) i (**) dowodzą, że pochodne $\hat{g}^{(n)}$ i iloczyn $\hat{g}$ przez ξ^n są ograniczone

Czyli $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$