TRANSFORMA FOURIER C.D.

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \overset{def}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx \quad \text{gdzie} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$$

Czy wzór ten można uogólnić i obliczać $\mathcal{F}T$ gdzie T jest dystrybucją?

Przykład $T = \delta$

Heurestyka

$$(\mathcal{F}\delta)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx = e^{-2\pi i \xi x}\Big|_{x=0} = 1.$$

Ogólniej, jeśli $T = \underbrace{\delta(x-x_0)}_{\text{delta Diraca w } x_0}$ to

$$(\mathcal{F}T)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-x_0)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx = e^{-2\pi i \xi x_0}$$

Zatem

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi i \xi x_0}\right)(x) \overset{(*)}{=} \delta(x-x_0)$$

co daje wzór (patrz podręcznik QM)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x_0}\, e^{+2\pi i \xi x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi (x-x_0)}\, dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \delta(x-x_0).$$

Pytanie: jak to uściślić?

Przypomnienie: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ - prz funkcji Schwartza, $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ - tr. Four.

Niech $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, na przykład

$T = \delta^{(n)}(x)$.

Definicja: Transformatą Fouriera dystrybucji T nazywamy dystrybucję $\mathcal{F}T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ taką, że

$(\mathcal{F}T)(f) = T(\mathcal{F}f)$ dla wszystkich $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Przykłady:

1) Niech $n = 0, 1, 2, \dots$ oraz $T(g) = \int \xi^n g(\xi)\, d\xi$

Wówczas

$$(\mathcal{F}T)(f) = T(\mathcal{F}f) = \int_{\mathbb{R}} \xi^n (\mathcal{F}f)(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \xi^n \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx \right) d\xi$$

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \text{całk p. cz.}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\xi \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \left(\frac{d^n}{dx^n} f\right)(x)\, e^{-2\pi i \xi x} =$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \frac{d^n}{dx^n} f\right)(0) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n f^{(n)}(0) =$$

$$\frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n}\, \delta^{(n)}(f)$$ co zapisujemy jako

$$\widehat{x^n}(\xi) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n}\, \delta^{(n)}(\xi).$$

2) Niech $T = \Theta(\xi)$, czyli $T(g) = \int_0^\infty g(\xi)\, d\xi$

Obliczmy $\mathcal{F}T$:

W tym celu zregularyzujemy T:

$\varepsilon > 0$

$\Theta(\xi) e^{-\varepsilon \xi} \in L^1(\mathbb{R})$ Ponadto

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Theta(\xi) e^{-\varepsilon \xi} = \Theta(\xi)$$

$$\mathcal{F}\left(\Theta(\xi) e^{-\varepsilon \xi}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \Theta(\xi) e^{-\varepsilon \xi} d\xi$$

$$= \int_0^\infty e^{-\xi(2\pi i x + \varepsilon)} d\xi = -\frac{1}{2\pi i x + \varepsilon} e^{-\xi(2\pi i x + \varepsilon)} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x + \frac{\varepsilon}{2\pi i}} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x - i\frac{\varepsilon}{2\pi}}.$$

Zadanie: Znaleźć granicę

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}.$$

Uwaga 1 Jeśli $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$

to $$P\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{f(0)}{x} = 0 \qquad = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\dots} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{f(x)-f(0)}{x} dx$$

Zatem

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-i\varepsilon} f(x)\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{f(x)-f(0)}{x-i\varepsilon} dx + \int_{-R}^{R} \frac{f(0)}{x-i\varepsilon}$$

$$= P\left(\frac{1}{x}\right)(f) + \delta(f) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x-i\varepsilon} dx$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x-i\varepsilon} = \log(R-i\varepsilon) - \log(-R-i\varepsilon).$$

$$\cong \log(R^2+\varepsilon^2) + 2\pi i - \log(R^2+\varepsilon^2) - i\pi \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{}$$

$i\pi$.

Podsumowując:

$$\hat{\Theta}(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\delta.$$

Dystrybucje w $\mathbb{R}^3$, przykład

Rozważmy funkcję $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Dystrybucja $T_{\frac{1}{r}}(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$

jest dobrze określona:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\cancel{r}} f(r,\theta,\varphi)\, r^{\cancel{2}} dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Wykazać, że $\Delta \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{potencjał,}} = -4\pi \underbrace{\delta}_{\text{ładunek punktowy}}$.

$r \neq 0$:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{-[x, y, z]}{r^3}$$

$$\partial_x^2 \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^2}$$

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$

∇ g, f - gładkie:

$$g \Delta f - f \Delta g = \operatorname{div}(g \nabla f) - \operatorname{div}(f \nabla g)$$

$$\nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f \qquad \qquad '' \quad \nabla f \nabla g + f \Delta g$$

Przechodzimy do zasadniczego rachunku:

$$(\Delta T_{\frac{1}{r}})(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\{ f(\vec{r}) = 0 \text{ dla } r > R \} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R > r \geq \varepsilon} \Big(\frac{1}{r} \Delta f - f \underbrace{\Delta \frac{1}{r}}_{=0} \Big)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R > r \geq \varepsilon} \operatorname{div} \Big(\frac{1}{r} \nabla f - f \nabla \frac{1}{r} \Big)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\int_{r=R} \left(\frac{1}{r}\nabla f - f\nabla\frac{1}{r}\right)\vec{n}\,dA}_{=0} - \int_{r=\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\nabla f - f\nabla\frac{1}{r}\right)\vec{n}\,dA$$

Tw Gaussa

bo $f = 0$ dla $r \geq R$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{r=\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\nabla f - f\nabla\frac{1}{r}\right) n\,dA.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad dA = \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\
&\frac{1}{r}\nabla f\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\nabla f. \\
&-f\nabla\frac{1}{r}\cdot\vec{n} = f\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{|r|} = f\cdot\frac{1}{r^2}\Big|_{r=\varepsilon} = f\frac{1}{\varepsilon^2}
\end{aligned}\right\}$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{\substack{\theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi}} d\varphi\, d\theta\, \sin\theta\, \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla f \vec{n} + \frac{f}{\varepsilon^2} \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} - \iint_{\substack{\theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi]}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, f(0) =$$

$$= -f(0) \cdot 2\pi \cdot (-\cos\theta) = -4\pi \cdot f(0)$$

Zatem $\boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta}$