Zadanie 4

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzić wzór Stokesa dla całki $\int_{\partial D} z\,dx + x\,dy + y\,dz$, $D = \{x^2+y^2 \le R^2, \; \cancel{z=2xy}\}$

wzór Stokesa:

$$\int_{\partial D} \vec{A}\, d\vec{l} = \int_D \text{rot}\,\vec{A}\, d\vec{S}$$

1)

$$I_1 = \int_{\partial D} \vec{A}\, d\vec{l} = \int_{\partial D} z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\partial D = \{x^2+y^2 = R^2, \; z = 2xy\}$$

parametryzacja:

$t \in [0, 2\pi]$, orientacja przeciwnie do zegara

$$x = R\cos t \qquad dx = -R\sin\,dt$$

$$y = R\sin t \qquad dy = R\cos t\,dt$$

$$z = 2R^2 \sin t \cos t \qquad dz = 2R^2(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} 2R^2 \underbrace{\sin t \cos^2 t\,dt}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{(po okresie)}} + R^2\cos^2 t\,dt + \underbrace{2R^2(\cos^2 t - \sin^2 t)\sin t\,dt}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{(po okresie)}}$$

$$= \pi R^2$$

2)

$$I_2 = \int_D \text{rot}\,\vec{A}\, d\vec{S}$$

$$\text{rot}\,\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

parametryzacja powierzchni

$$x = r\cos t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$y = r\sin t \qquad\qquad r \in [0, R]$$
$$z = 2r^2 \sin t \cos t$$

orientacja zgodna z orientacją ∂D
jest zadana przez $\vec{n} = \hat{t}_r \times \hat{t}_t$ („do góry" zgodnie z $\hat{z}$)

$$M = \begin{array}{cccc} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z & \\ \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos t \\ -r\sin t \\ \shortparallel \\ \frac{\partial x}{\partial t} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial r} \sin t \\ r\cos t \\ \shortparallel \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{array} & \left.\begin{array}{c} 4r\sin t\cos t \\ 2r^2 \cos 2t \\ \shortparallel \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \leftarrow \vec{t}_r \\ \leftarrow \hat{t}_t \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2r^2 \sin t \cos 2t - 4r^2 \sin t \cos^2 t \\ -4r^2 \sin^2 t \cos t - 2r^2 \cos t \cos 2t \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r^2 \sin t \\ -2r^2 \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \operatorname{rot}\vec{A} \cdot \vec{n}\, dr\, dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\, dr\, dt = \pi R^2$$

rzeczywiście $I_1 = I_2$ $\boxtimes$

— — — — —

UWAGA:
powierzchnię można też sparametryzować
przy pomocy x, y