Zadania tydzień 13.

Zad 0) (Ficht. t3 640/12) Sprawdzić wzór Stokesa
$\int_L y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_S \operatorname{rot}[y, z, x]\,\vec{n}\,ds$ gdzie L jest okręgiem $x = a\cos^2 t$, $y = a\sqrt{2}\sin t\cos t$, $z = a\sin^2 t$ a S ograniczonym przez ten okrąg kołem.

Zad 1 (Fichtenholz t3 650/4)

Znaleźć środek ciężkości bryły ograniczonej powierzchniami paraboloidy $x^2+y^2 = 2az$ oraz kuli $x^2+y^2+z^2 = 3a^2$

Zad 2 (Fichtenholz t3 650/5)

Znaleźć masę i położenie środka ciężkości kuli $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$ jeśli jej gęstość jest dana wzorem $\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Zad 3 (F. 654/1ac)

Przekształcić według wzoru Gaussa-Ostrogradzkiego całki powierzchniowe

(a) $I_1 = \iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$

(c) $I_3 = \iint\limits_S x dydz + y dzdx + z dxdy$

jeśli S jest powierzchnią bryły V.

Zad 4 (F 654 2/ac)

Udowodnić za pomocą wzoru Gaussa-Ostrogradzkiego wzory

(a) $\iiint\limits_V \Delta u \, dxdydz = \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$

(c) $$\iiint_V (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint_S v\frac{\partial}{\partial n}u - u\frac{\partial v}{\partial n}$$

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$$

$$\frac{\partial}{\partial n} f = \partial_x f \cos(x,n) + \partial_y f \cos(y,n) + \partial_z f \cos(z,n).$$

Zad 5 (660 1, 3)

Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią: a) $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z$

b) $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c}$$