02.06.2009

Operatory hermitowskie i unitarne

Zadanie 1. Niech A, B będą operatorami hermitowskimi w przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym.

(a) Czy operatory AB, BA są hermitowskie?
(b) Pokazać, że $AB + BA$ jest hermitowski.
(c) Pokazać, że dla $\bar{\lambda} = -\lambda$, operator $\lambda(AB - BA)$ jest hermitowski.

Zadanie 2. Wyznaczyć bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych, macierz operatora w tej bazie oraz rozkład spektralny dla poniższych operatorów symetrycznych/hermitowskich:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{pmatrix} 3 & 2-2i \\ 2+2i & 7 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. W przestrzeni wektorowej $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ określamy $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$. Wykazać, że:

(a) $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ jest przestrzenią unitarną;
(b) każda macierz unitarna A w tej przestrzeni ma długość $\sqrt{n}$;
(c) operatory $X \mapsto AX$, $X \mapsto A^\dagger X$ są do siebie sprzężone;
(d) operator $X \mapsto AX$, gdzie A jest macierzą unitarną, jest unitarny.

Zadanie 4. Wyznaczyć ortonormalną bazę wektorów własnych i macierz operatora unitarnego w tej bazie, danego w pewnej bazie ortonormalnej macierzą:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$