

Zadania z analizy II. Seria 3

- **Zadanie 1.** Znaleźć wszystkie wielomiany stopnia 2, spełniające 2-wymiarowe równanie Laplace'a.
- **Zadanie 2.** Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}$, zadanej wzorem

$$f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \dots + \frac{n}{x_n}.$$

- **Zadanie 3.** Znaleźć odległość punktu $(0, 0, 0)$ od powierzchni określonej równaniem

$$z = \frac{1}{xy}.$$

- **Zadanie 4.** Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $(x, y) \mapsto z(x, y)$, zadanej niejawnie równaniem

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2 = 0.$$

- **Zadanie 5.** Jak w zadaniu 4, ale funkcja z zadana jest równaniem

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + 1 = 0.$$

- **Zadanie 6.** Znaleźć pochodną odwzorowania $(x, y) \mapsto (u, v)$ w punkcie $(x, y, u, v) = (1, 2, 3, 4)$, zadanego równaniem $F(x, y, u, v) = 0$, gdzie $F : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dane jest przez

$$F(x, y, u, v) = (x + y + u + v - 10, x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 30).$$

- **Zadanie 7.** Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f : S \rightarrow \mathbf{R}$, jeśli $f(x, y, z) = (x - 2y)z$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 3x^2 + 5y^2 + 30z^2 = 32\}$. Zbadać jeden z punktów krytycznych.
- **Zadanie 8.** Stosując metodę mnożników Lagrange'a, znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na zbiorze $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Zbadać jeden ze znalezionych punktów krytycznych, obliczając pochodne rzędu 2.