

Seria zadań, Teoria grup

Polecam najpierw przerobić zadania 4.1, 4.2, 4.4, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, ze skryptu "GRUPY ORAZ ICH REPREZENTACJE Z ZASTOSOWANIAMI W FIZYCE", A. Trautman: <http://www.fuw.edu.pl/~amt/skr4.pdf>

Zadanie 1. Niech G będzie grupą oraz $D(G) = \{a^{-1}b^{-1}ab : a, b \in G\}$.

- Wykazać, że $D(G)$ jest podgrupą normalną G .
- Niech $\pi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem. Wykazać, że $\pi(D(G)) \subset D(H)$ oraz jeśli π jest epimorfizmem to $\pi(D(G)) = D(H)$.
- Niech S_n będzie grupą permutacji a A_n jej podgrupą alternującą. Wykazać, że $D(S_n) = A_n$.

Zadanie 2. Znaleźć tabele charakterów grupy S_4 i A_4 . Niech π będzie reprezentacją S_4 na $V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 + \dots + z_4 = 0\}$. Wykazać, że π jest nieprzywiedlna. Znaleźć rozkład $Sym^2(V)$ oraz $\Lambda^2(V)$ na reprezentacje nieprzywiedlne. Sprawdzić, które reprezentacje nieprzywiedlne S_4 po obcięciu do A_4 pozostają nieprzywiedlne.

Zadanie 3. Niech π będzie (jedyną) 2-wymiarową reprezentacją nieprzywiedlną S_3 . Znaleźć rozkład $\pi^{\otimes n}$ na reprezentacje nieprzywiedlne.

Zadanie 4. Znaleźć tabele charakterów grupy $G = SL_2(\mathbb{Z}_3)$. Znaleźć rozkład reprezentacji naturalnej $\pi : G \rightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ na reprezentacje nieprzywiedlne. To samo dla $\pi \otimes \pi$.