

ZADANIA Z TEORII GRUP

Zadanie 1. Niech ρ_{kl} będą elementami macierzowymi nieprzywiedlnej reprezentacji grupy skończonej G . Obliczyć $\sum_{a \in G} \rho_{kl}(a)$.

Zadanie 2. Grupa Pauliego to grupa generowana przez cztery elementy $\varepsilon, e_1, e_2, e_3$ o jedności oznaczonej symbolem 1, spełniające następujące relacje:

$$\varepsilon^2 = 1, e_i^2 = 1, \varepsilon e_i = e_i \varepsilon, e_i e_j = \varepsilon e_j e_i.$$

Znaleźć tabelę charakterów i reprezentacje grupy G . Pokazać, że G posiada dokładnie dwie reprezentacje nieprzywiedlne σ_+, σ_- dla których $\sigma_{\pm}(\varepsilon) \neq \text{id}$. Wykazać, że σ_+, σ_- są typu zespolonego. Określić typy pozostałych permutacji.

Zadanie 3. Rozważmy standardowe działanie grupy A_4 na czworościanie. Niech X będzie zbiorem krawędzi czworościanu z działaniem grupy A_4 oraz niech V będzie przestrzenią funkcji na X o wartościach zespolonych $V = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}\}$. Niech $\pi : G \rightarrow V$ będzie reprezentacją zadaną formułą

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1}x)$$

gdzie $g \in G, f \in V, x \in X$. Znaleźć rozkład π na reprezentacje nieprzywiedlne.

Zadanie 4. Rozważmy standardowe działanie grupy S_4 na sześciu ścianach sześciokąta z działaniem grupy S_4 oraz niech V będzie przestrzenią funkcji na X o wartościach zespolonych $V = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}\}$. Niech $\pi : G \rightarrow V$ będzie reprezentacją zadaną formułą

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1}x)$$

gdzie $g \in G, f \in V, x \in X$. Znaleźć rozkład π na reprezentacje nieprzywiedlne.

Zadanie 5. Rozważmy nieprzywiedlne reprezentacje grupy S_4 oraz ich obcięcie do podgrupy alternującej $A_4 \subseteq S_4$.

- Które nieprzywiedlne reprezentacje S_4 pozostają nieprzywiedlne po obcięciu do A_4 ?
- Które nierównoważne nieprzywiedlne reprezentacje S_4 stają się równoważne po obcięciu do A_4 ?